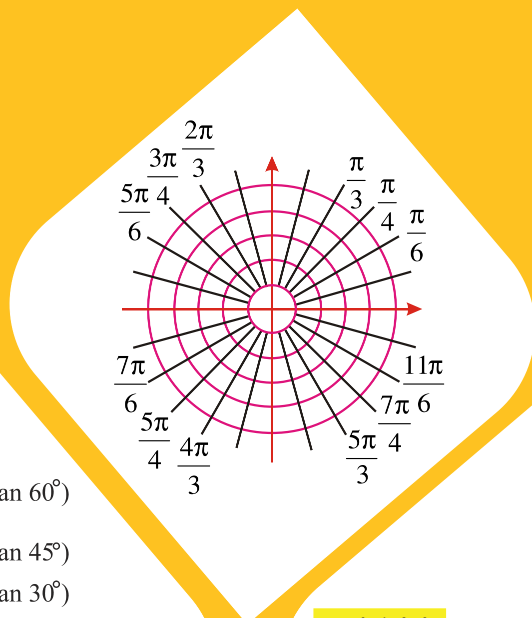
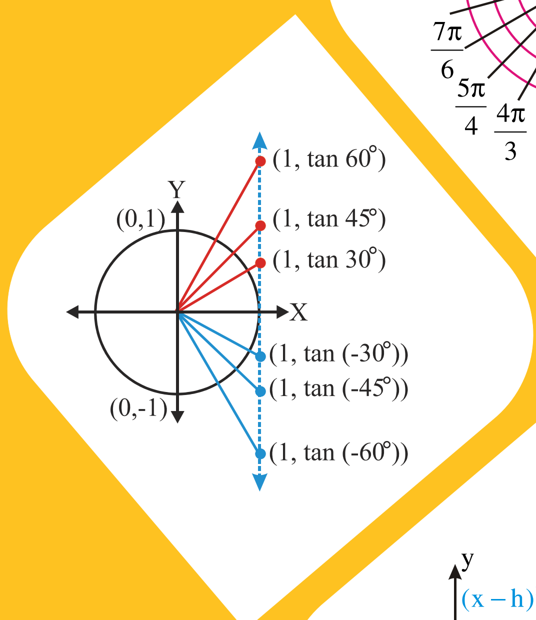
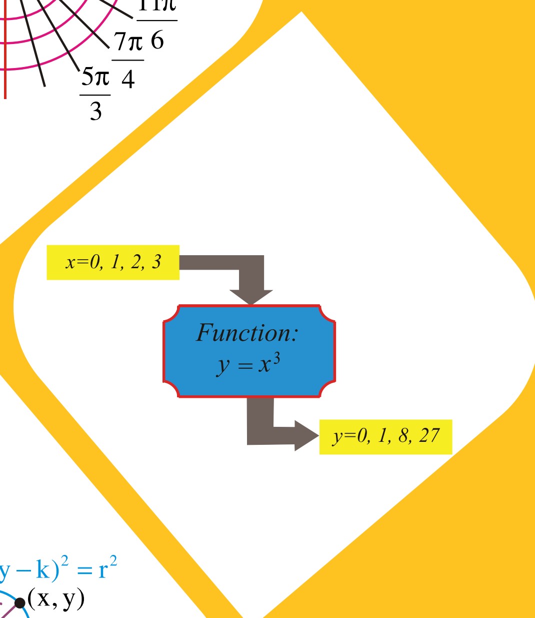
د پوهنې وزارت

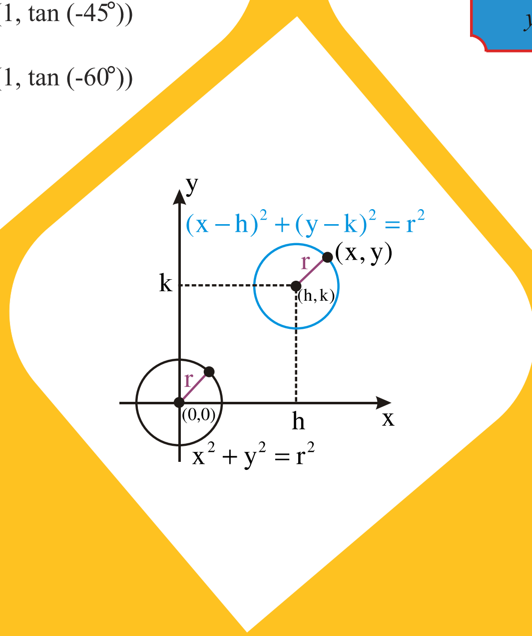
ریاضی

لسم ټولګی









۱۳۹۸

ریاضی لسم ټولګی

MATHEMATICS

Grade 10



ملي سرود

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هیواد به تل ځلیږي
په سینه کې د آسیا به
نوم د حق مو دی رهبر

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه یان
لکه لمر پر شنه آسمان
لکه زړه وي جاویدان
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحيم

رياضي
لسم
ټولګی

١٣٩٨
هـ . ش.

د کتاب ځانګړتیاوې

مضمون: رياضي
مؤلفين: د تعليمي نصاب د رياضياتو ديپارتمنت د درسي کتابونو مؤلفين
اډيټ کوونکي: د پښتو ژبې د اډيټ ديپارتمنت غړي
ټولګی: لسم
د متن ژبه: پښتو
انکشاف ورکوونکی: د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تألیف لوی رياست
خپروونکی: د پوهنې وزارت د اړيکو او عامه پوهاوي رياست
د چاپ کال: ۱۳۹۸ هجري شمسي
د چاپ ځای: کابل
چاپخونه:
برېښناليک پته: curriculum@moe.gov.af

د پوهنې د وزیر پیغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او ښښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته يې ژوند رابښلی، او د لوست او لیک له نعمت څخه يې برخمن کړي يو، او د الله تعالی پر وروستي پیغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پیغام ورته (لوستل) و، درود وایو.

څرنگه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمریز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د گران هېواد ښوونیز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدینو شوراگانې د هېواد د پوهنیز نظام شپږگوني بنسټیز عناصر بلل کیږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختیا او پرمختیا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونیز نظام کې د ودې او پراختیا په لور بنسټیزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونیز نصاب اصلاح او پراختیا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړیتوبونو څخه دي. همدارنگه په ښوونځیو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونیزو تأسیساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کیفیت او توزیع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور یو، چې د باکیفیته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنیو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونیز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توگه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مدیرانو څخه په درناوي هیله کوم، چې د هېواد بچیانو ته دې د درسي کتابونو په تدریس، او د محتوا په لېږدولو کې، هیڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د یوه فعال او په دیني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زیار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤولیت په درک سره، په دې نیت لوست پیل کړي، چې د نن ورځې گران زده‌کوونکي به سبا د یوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او گټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانگه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه گټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځیرکو او فعالو گډونوالو په توگه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدریس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونیز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په لیکلو او چمتو کولو کې يې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپېڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بریا غواړم.

د معیاري او پرمختللي ښوونیز نظام او د داسې ودان افغانستان په هیله چې وگړي يې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزیر

دکتور محمد میرویس بلخي

عنوان	فهرست	مخ

لومړی څپرکی (پولینوم) ۳

الجبري افادې، د پولینوم درجه او د پولینوم ډولونه، د پولینوم د قیمت او پولینوم دضربیونو د مجموعی پیدا کول، د پولینوم څلور گوني عملیې

د باقي مانده قضیه، فکټور قضیه او ترکیبي وېش

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

دویم څپرکی: رابطه ۵۳

مرتبې جوړې او کارتیز یني مستوي، د کارتیزیني ضرب حاصل ا و گراف یې

رابطه او معکوسه رابطه.

معادله رابطه.

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

دریم څپرکی : تابع ۶۹

د تابع دلیکلو طریقه او دیوې تابع د قیمت پیدا کول، د تابع د تعریف د ساحې پیدا کول، د یوې تابع گراف او د گراف له مخې

د یوې تابع پېژندنه، دگراف له مخې د یوې تابع د تعریف او د قیمتونو د ناحیو او د تابع قیمتونو پیدا کول، ځینې خاصې تابع گانې اوگرافونه یې.متزایدې او متناقصې تابع گانې، جفتې او طاقې تابع گانې دگرافونو انتقال (عمودي انتقال، افقي انتقال او دعمودي او افقي انتقالونو ترکیب، د تابع گانو عملیې د تابع گانو ترکیب، معکوسه تابع، یو په یو تابع، د تابع او د هغې د معکوسي تابع گراف، پولینومي تابع گانې (لومړۍ او دویمه درجه تابعگانې) اوگرافونه یې

ناطقی تابع گانې اوگراف یې (عمودې، افقي او مایل مجانبونه)

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

څلورم څپرکی: مثلثاتي تابع گانې ۱۴۹

زاویه او د زاویې د اندازه کولو واحدونه، دیوې زاویې معیاري حالت اوکوټر مینل زاویې

مثلثاتي تابع گانې او د ځینو خاصو زاویو مثلثاتي نسبتونه

د $0°$, $90°$, $180°$, $270°$ او $360°$ زاویو مثلثاتي نستونه

د یوې حاده زاویې او نورو زاویو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړیکې

د مثلثاتي تابع گانو گراف

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

پنځم څپرکی: د مثلثاتو تطبیقات ۲۲۳

د مرکبو زاویو د مثلثاتي نسبتونه، د دوو زاویو د مجموعې او تفاضل مثلثاتي فورمولونه

د αزاویې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د 2α او 3α زاویو د مثلثاتي نسبتونو پیداکول، د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضل بدلول، د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل په شکل،

عنوان **فهرست** **مخ**

د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل بدلول په جمع یا یې په تفاضل باندې، د قوس اوږ دوالی، د یوې دایرې قطاع او مساحت یې، د دایرې قطعه او مساحت، د مثلث مساحت د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو ترمنځ د زاویې له جنسه، د مثلث مساحت د مثلث د دریو ضلعوله جنسه (د هیرون فورمول) د یوه مثلث د محیطي او محاطي دایرو شعاع ګانې

د څپرکي لنډیز او پو ښتنې

شپږم څپرکی: مختلط عددونه **۲۷۷**

موهومي عددونه او د موهومي عددونو څلورګونې عملیې

د مختلطو عددونو د جمعې او تفریق عملیې

د مختلطو عددونو ضرب، د یو مختلط عدد مزدوج، د مختلط عدد ضربي معکوس

د مختلطو عددونو وېش

د مختلطو عددونو په ساحه کې ددویمې درجې یو مجهوله معادلو حل

د څپرکی لنډیز او پوښتنې

اووم څپرکی تحلیلي هندسه **۳۰۵**

د وضعیه کمیاتو سیستم او د دوو نقطو ترمنځ فاصله

د هغې نقطې د وضعیه کمیاتو پیداکول چې یو قطعه خط په یوه نسبت باندې وېشي

د یوه مستقیم خط میل

د یوه مستقیم خط معادله (د یو مستقیم خط معیاري معادله، دهغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي، دوې نقطې یې معلومې وي. له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي، د مستقیم خط نورمال معادله او د مستقیم خط عمومي معادله)

د یوه مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول، د مستقیم خط د معادلو په نورو شکلونو باندې.

د یوې نقطې فاصله له یوه مستقیم خط څخه، د دوو موازي خطونو تر منځ فاصله

دایره او د دایرې معادله، د یوه مستقیم خط حالتونه له یوې دایرې سره، د مماس معادله او د مماس اوږدوالی

د مثلث د مساحت پیداکول چې د راسونو و ضعیه کمیات یې معلوم وي.

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

اتم څپرکی احصائیه **۳۵۹**

د فریکونسي څو ضلعي ګراف، د ساقې او پاڼې ګراف، ربعي (څلورمې)، صندوقچه یي ګراف، د نارمل منحني د مرکزي تمایل پرتله کول، ربعي انحراف، واریانس، معیاري انحراف،

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

نهم څپرکی د ریاضي منطق **۳۹۱**

د شهودي درک استدلال، تمثیلي استدلال، استقرایي استدلال، د ریاضي د استقرا استدلال، استنتاجي استدلال، د مثال د نفي کولو استدلال، غیر مستقیم ثبوت، د ریاضي منطق او د بیان استنتاج، د څپرکي لنډیز او پوښتنې

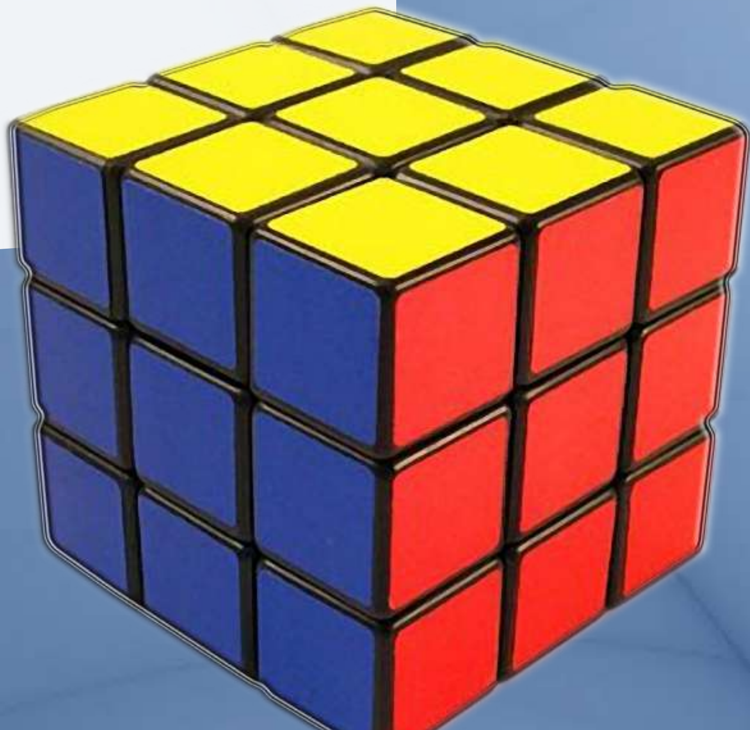
لومړی څپرکی

پولینوم

پولینوم(Polynome)

یا (Polynomial)

$$(3x^2+5x+2)+(5x+6)$$
$$=3x^2+5x+2+5x+6$$
$$=3x^2+5x+5x+6+2$$
$$=3x^2+10x+8$$



الجبري افادې
(Algebraic Expressions)



ایــــا ویــــلای شـئ چـې پـه $\frac{x^4-1}{x^2}$ ،

$x^3+\frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{x}+y^3$ او $\sqrt{y^2+1}$ الجبري

افادو کې کومــه یوه ناطقه اوکومه یوه غیر ناطقه

الجبري افاده ده؟

متحول او ثابت (variable and constant): متحول یو سمبول (Symbol) دی چې د یوه غیر خالي سټ د هر عنصر په ځای وضع کېږي.یا یو توري چې قیمتونه یې تغیر کوي د مثال په ډول که $A=\{x/x\in IN$ او $x\le 10\}$ وي.

نو د A په سټ کې x له یوه څخه تر 10 پورې د طبیعي عددونو قیمتونه اخیستلای شي. x ، ته متحول(Variable) وایي. عموماً متحولونه د انګلیسي ژبې د کوچنیو تورو، لکه: x,y,z او نورو په واسطه ښودل کېږي.

د یوه عدد قیمت تغیر نه کوي، لکه: د 4 عدد هیڅکله له 5 یا 3 او یا کوم بل عدد سره مساوي کېدای نه شي، نو ټول حقیقي عددونه ثابت (Constants) دي.

د حقیقي عددونو سربېره د انګلیسي ژبې توري، لکه: $a,bc\ldots$ او نور هم د ثابتو پر ځای کارول کېږي.

الجبري افاده (Algebraic Expression): کېدای شي الجبري افاده له یوه ثابت، یو متحول او یا د ثابتو او متحولونو له ترکیب څخه جوړه شوې وي. د الجبري افادو لاندې مثالونه وګورئ.

$5\sqrt{x}$ ، $4x+5+\frac{15}{t^2}$ ، $\sqrt{3}x$ ، x^2-x+1 ، x ، -12 ، 12 او داسې نور.

په $3x^2$ الجبري افاده کې 3 ته ضريب (Coefficient) وايي. په $-\frac{1}{2}y$ کې د $-\frac{1}{2}$ عدد او په x کې (1) ضريب دی. $-3x^5y^5$ او $15x^5y^5$ مشابه حدونه (Liketerms) دي چې مشابه متحولونه او مساوي توانونه لري، خو عددي ضريبونه يې سره توپير لري.

د الجبري افادو ډولونه: الجبري افادې په درو ډولونو دي.

1- پولينومي الجبري افادې (Polynomial algebraic expressions)

پولينوم: هغه يوه يا څو حده الجبري افاده چې د تورو توانونه يې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي، پولينوم نومېږي او x^3-x+1، $2x^2+x-1$، $x-1$، 12 پولينومونه دي، خو $x^{-2}+x-1$، $\frac{1}{x}+x$ او $x^3+\sqrt{x}+\frac{y}{x^2}$ پولينومونه نه دي يا د پولينوم مشخصې دا دي:

- د ټولو متحولونو توانونه يې مکمل عددونه وي.
- په مخرج کې متحول ونه لري.
- متحول تر جذر لاندې نه وي.

لومړی مثال: په لاندې راکړل شوو الجبري افادو کې کوم يو پولينوم او کوم يو يې پولينوم نه دي؟

$$a)\sqrt{2}x \quad , \quad b)2\sqrt{x} \quad , \quad c)\frac{1}{y^2}-\frac{2}{x^3} \quad , \quad d)x^{\frac{1}{2}} \quad , \quad e)x^{-3}+x^2$$

$$f)8p^2+p^{2.2} \quad g)9x^2-\frac{7}{x^2} \quad , \quad h)88 \quad , \quad i)6a^2-4a$$

حل: h,a او i پولينومونه دي، خو b, c, d, e, f او g پولينومونه، نه دي. په ياد ولرئ چې هر پولينوم، يوه ناطقه الجبري افاده ده، خو هره ناطقه الجبري افاده پولينوم نه دی. د مثال په ډول:

$x^3+\frac{y}{x^2}+\frac{y}{x}+y^3$ يوه ناطقه الجبري افاده ده، خو پولينوم نه دی.

12 هم يو پولنيوم دی، ځکه چې: $12=12x^0$ دی او صفر هم د مکملو عددونو په سټ کې شامل دی، خو $5\sqrt{x}$ او $\frac{5}{x^3}$ پولينومونه نه دي، ځکه $5\sqrt{x}=5x^{\frac{1}{2}}$، $\frac{5}{x^3}=5x^{-3}$ چې $\frac{1}{2}$ او -3

د مکملو عددونو په سټ کې شامل نه دي.

پولينوم د يو توري په واسطه، لکه: P ښودل کېږي، يو پولينوم چې له يو متحول څخه جوړ شوی وي عمومي شکل يې په لاندې ډول دی چې د معياري شکل په نامه يادېږي.

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

n يو مکمل عدد او $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}, a_n$ ضريبونه دي چې حقيقي عددونه دي. که $a_n \neq 0$ وي، نو n د پولينوم درجه ده.

فعالیت

له $\sqrt{8}x^3, -8x^2$ ، $\frac{1}{x}$ ، x ، $\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x}+6$ ، $2x^3-x^2$ او $8\sqrt{x}$ الجبري افادو څخه کومه يوه يې پولينوم دی او کومه يوه پولينوم نه دی؟

دويم مثال: د $P(x)=-5x^3+x^2-x+12$ په پولينوم کې، $n=3$ ، $a_n=-5$ ، $a_2=1$ ، $a_1=-1$ او $a_0=12$ دی. او د $11x^2-1$ په پولينوم کې، $n=2$ ، $a_n=11$ ، $a_1=0$ ، او $a_0=-1$ دی.

2- ناطقه الجبري افاده (Rational algebraic expression):

که يوه الجبري افاده د $\frac{p}{q}\ (q\neq 0)$ په شکل وليکلای شو چې p او q پولينومونه وي. داسې الجبري افادې ته ناطقه الجبري افاده وايي. د مثال په ډول $x^2-\frac{1}{x^2}$ چې د $\frac{x^4-1}{x^2}$ په شکل يې هم ليکلای شو چې يو متحول لري يوه ناطقه الجبري افاده ده. څرنګه چې هرې الجبري افادې ته يو مخرج ورکولای شو، نو (x^2-1) هم يوه ناطقه الجبري افاده ده، ځکه چې $\frac{x^2-1}{1}=x^2-1$ دی.

3- غیر ناطقه الجبري افاده (Irrational algebraic expression):

داسې یوې الجبري افادې ته چې د دوو پولینومونو د خارج قسمت په بڼه یې نه شو لیکلای، غیر ناطقه الجبري افاده وایي، لکه: $\sqrt{xy}$ ، $\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$ او $\sqrt{y^2+1}$ د غیر ناطقو الجبري افادو مثالونه دي.

یوه الجبري افاده کېدای شي چې ناطقه، غیر ناطقه او یا پولینومي الجبري افاده وي. پولینوم هغه یو یا څو حده الجبري افاده ده چې د تورو توانونه یې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي.

پوښتنې

1- په لاندې الجبري افادو کې کومه یوه ناطقه، غیر ناطقه او پولینومي الجبري افاده ده؟

$$\frac{1}{x} \;,\quad \sqrt{x}-\frac{1}{2} \;,\quad \frac{3x^2}{2} \;,\quad \frac{m+3}{6} \;,\quad x+\frac{1}{x} \;,\quad 3x^2+\frac{xy}{2}$$ او 13

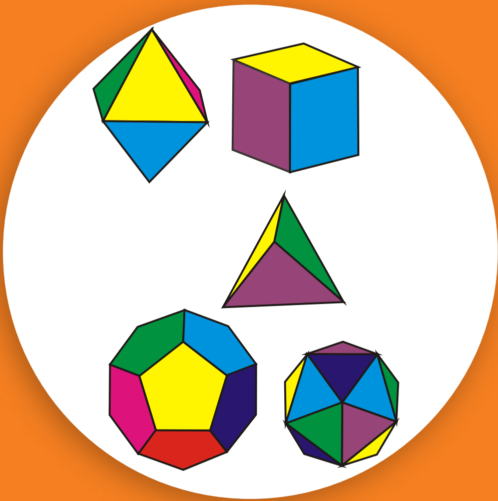
2- په لاندې الجبري افادو کې کومه یوه یې یو پولینوم او کومه یوه یې پولینوم نه دی؟

$$3x^2+\frac{xy}{2} \;,\quad -20a^3b+28ab^4 \;,\quad \frac{1}{7}x^3-x$$

$$\frac{1}{x}-\frac{x^2}{5} \;,\quad 8\sqrt{x} \;,\quad 8x^{-8} \;,\quad 3x \;,\quad -0.03$$

3. د $Px^4-ax^3+bx^2+cx+d$ په پولینوم کې، a_1, a_2, a_3, a_n او a_0 وښیاست.

4. د $P(x)=\frac{x^3}{2}-2x^2-1$ په پولینوم کې، a_1, a_2, a_3 او a_0 وښیاست.



د پولينوم درجه او د پولينوم ډولونه

آيا ويلاى شئ چې د:

$12y^5x^3 + x^4y^3$□$12x^3$□$+ x^2 - x$ او

12 د پولينومونو درجې څو دي؟

مونوم عدد، يو متحول يا د يو عدد او يو يا څو متحولينو د ضرب حاصل دی.

$3x$ يا $16x$ ته مونوم يا (Monomial) (يو حده)الجبري افاده وايي. $x-4$ يا $ab-y$ ته باينوم (Binome) يا (Binomial) (دوه حده) الجبري افاده وايي او د $2x^3-x-1$ الجبري افاده ترينوم (Trinomial) (درې حده) الجبري افاده ده او $\sqrt{2x}-\frac{1}{y}+1$ الجبري افادې ته مولټينوم (Multinomial) وايي. په يوه پولينوم کې مونومونه د پولينوم د حدونو په نامه يادېږي او هر مونوم يو پولينوم دی.

ځينې وختونه پولينوم له يو، دوه، درې او څو متحولونو څخه جوړ شوی وي.

د $2x^3-8x^2+7x+11$ پولينوم د يو متحول، $2x^3-3y$ پولينوم د دوه متحولونو او $x+y+z$ د دريو متحولونو لرونکی پولينوم دی چې په لاندې جدول کې ښودل شوي دي.

ترينوم (درې حده)	باينوم (دوه حده)	مونوم (يو حده)	متحول
$3x^2+2x-4$	$5y^2+3y$	$5x^3$	يو متحول
$6x^2+5x-3y^2$	$7x^2-4y^3$	$7x^2y$	دوه متحولونه
$3a^2b^2+6c^2-z^5a$	$8a^2b+4c$	$4xyz^2$	درې متحولونه

يادونه: بايد پام مو وي چې $2\sqrt{xy}, \frac{5}{x}$ او y^{-3} هريو يې مونوم نه دی.

فعالیت

د ax^2+bx+c، $2x-y$، 15، $-3x$ او $4x^2-4y$ الجبري افادو کې مونوم، باینوم او ترینوم وښیاست.

د یوه پولینوم درجه (Degree of a Polynome): که پولینوم له یوه توري څخه جوړ شوی وي، د هغه توري لوړ توان د پولینوم درجه ده، لکه: د $-x^3+2x+1+x^5$ د پولینوم درجه 5 ده. که پولینوم له ډېرو تورو څخه جوړ شوی وي، د زیات توان لرونکي مونوم درجه د پولینوم درجه ده، لکه: د $2x^2y^3-5xy^5+x^3y$ د پولینوم درجه 6 ده، ($1+5=6$) او دا پولینوم نظر x ته دریمه درجه او نظر y ته پنځمه درجه پولینوم دی. که د یوه پولینوم درجه یوه وي، خطي پولینوم (Liner Polynome) او که د پولینوم درجه دوه وي، دویمه درجه پولینوم (Quadratic Polynome) او که درجه یې درې وي، دریمه درجه پولینوم (Cubic Polynomial) ورته وایي. او هم د $3x^2$ مونوم دویمه درجه، د $3x^2y^3$ مونوم درجه 5 او د 12 مونوم درجه صفرده. داسې پولینوم ته ثابت پولینوم وایي، ځکه چې $12=12x^0$

ثابت پولینوم: هغه پولینوم دی چې درجه یې صفر وي.یا هغه پولینوم دی چې د ټولو متحولونو ضریبونه یې صفر وي.

لومړی مثال: د m او n قیمتونه پیدا کړئ، که $(2m-4)x^2+(5-n)x+13$ یو ثابت پولینوم وي.

حل: څرنگه چې دا یو ثابت پولینوم دی، نو د هر حد د متحول ضریب یې صفر دی.

نو:

$$5-n=0 \qquad n=5$$

$$2m-4=0 \qquad 2m=4 \qquad m=2$$

صفري پولینوم (Zero Polynome): که د ثابت پولینوم ثابت حد صفر وي، داسې پولینوم ته صفري پولینوم وایي، لکه: $P(x)=0$ ، د صفري پولینوم درجه تعریف شوې نه ده.

دویم مثال: د a قیمت پیدا کړئ که چېرې $(b-4)x^3-(2c+6)x+(a-b+c)$ یوصفري پولینوم وي.

حل: په صفري پولینوم کې هر حد صفر وي، نو:

$$b-4=0 \qquad 2c+6=0 \qquad a-b+c=0$$
$$b=4 \qquad 2c=-6 \qquad a-4-3=0$$
$$c=-3 \qquad a=7$$

دریم مثال: د $P(x)=x^2-1+3x^5$ ، $g(x)=2xy^2-x^2y^3$ او $h(x)=\sqrt{3}$ د پولینومونو درجې پیدا کړئ.

حل: د $P(x)$ د پولینوم درجه 5 د $g(x)$ د پولینوم درجه هم 5 ده، $(n=5)$ خو د $h(x)$ د پولینوم درجه صفر ده.

فعالیت

د هر پولینوم درجه څو ده؟ او هم د دې پولینومونو درجې نظر هر توري ته پیدا کړئ.

$x^2-x^3+2x+5x^5 \quad , \quad x-1 \quad , \quad 15 \quad , \quad 2m^3n^2-3mn^3-mn$

مکمل او ناقص پولینومونه: مکمل پولینوم هغه پولینوم دی چې له لوړ توان څخه تر ثابت عدد پورې ټول حدونه ولري $x^3+1+2x-x^2$, $x-1$ او 51 مکمل پولینومونه دي، خو x^2-1 او x^3+x+1 ناقص پولینومونه دي. موږ کولای شو دا ناقص پولینومونه د مکملو پولینومو په شکل ولیکو، لکه: $x^2-1=x^2+0\cdot x-1$ او $x^3+x-1=x^3+0\cdot x^2+x-1$

منظم او غیر منظم پولینومونه: د $2x^3-3x^2+4x-1$ یا $-11+12x+13x^2-x^3$ پولینومونه منظم، خو د $3x^4-x+1+x^3+x^2$ پولینوم یو غیر منظم پولینوم دی. کولای شو چې یو غیر منظم پولینوم د منظم پولینوم په شکل ولیکو، لکه: همدا پولینوم په دوه ډوله د منظم پولینوم په شکل لیکلای شو. $3x^4+x^3+x^2-x+1$ یا $1-x+x^2+x^3+3x^4$

نزولي او صعودي پولينومونه

(Descending and ascending Polynomes):

که يو پولينوم د متحول له لوړ توان څخه ټيټ توان ته ترتيب شوی وي، نزولي او که له ټيټ توان څخه لوړ توان ته ترتيب شوی وي، صعودي ترتيب ورته وايي.

د مثال په ډول $x^4+3x^3+x^2+x+1$ په نزولي ترتيب او د $1+x+x^2+3x^3+x^4$ پولينوم په صعودي ترتيب ليکل شوی دی.

که يو پولينوم له دوو يا څو تورو څخه جوړ شوی وي، نو مونږ کولای شو نظر هر توري ته يې په صعودي يا نزولي ډول ترتيب کړو، لکه: د $x^3y+3x^2y^2+2xy^3-5y^4$ پولينوم نظر x ته په نزولي ډول او نظر y ته په صعودي ډول ترتيب شوی دی.

فعاليت

دا پولينومونه په صعودي ډول ترتيب کړئ:

$$4x-5+6x^2+8x^3\ ,\ 2y^2-4y+3-3y^4+y^3\ ,\ 2a^3-5+4a^4+a^5+3a^2+a$$

څلورم مثال: د $P(y)=4xy^4-3x^3y^2+2x^2y^3+x^4+y^5$ پولينوم نظر y ته په صعودي ترتيب وليکئ:

حل

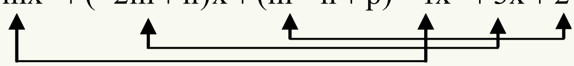
$$P(y)=x^4-3x^3y^2+2x^2y^3+4xy^4+y^5$$

معادل پولينومونه: هغه پولينومونه دي چې يو متحول ولري او د مشابه حدونو ضريبونه يې سره مساوي وي.

پنځم مثال: که د x^2+3x+2 او $m(x-1)^2+n(x-1)+P$ پولينومونه سره معادل وي، د m, n او p قيمتونه پيدا کړئ.

حل

$$m(x^2-2x+1)+nx-n+p=x^2+3x+2$$
$$mx^2-2mx+m+nx-n+p=x^2+3x+2$$
$$mx^2+(-2m+n)x+(m-n+p)=1x^2+3x+2$$



په نتیجه کې:

$$m = 1$$
$$-2m + n = 3 \qquad \Rightarrow n = 5$$
$$m - n + p = 2 \qquad \Rightarrow p = 6$$

متجانس پولینومونه (Hemogence Polynomes): چې د ټولو حدونو توانونه يې سره مساوي وي، لکه: د $2x^2 + y^2 - z^2$ يو متجانس پولینوم دی.

شپږم مثال: که د $3x^2y + 5x^mz - 7y^{n-3}z^2$ پولینوم متجانس وي، د m او n قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$$m + 1 = 2 + 1 \qquad n - 3 + 2 = m + 1$$
$$m = 2 \qquad n - 1 = m + 1$$
$$n - 1 = 2 + 1$$
$$n = 4$$

که پولینوم له یوه توري څخه جوړ شوی وي، د دې توري لوړ توان د پولینوم درجه ده او که پولینوم له ډېرو تورو څخه جوړ شوی وي، د لوړ توان لرونکي مونوم درجه د دې پولینوم درجه ده. هغه پولینومونه چې يو متحول ولري او د مشابه حدونو ضریبونه يې سره مساوي وي، د معادلو پولینومونو په نامه یادېږي او هغه پولینوم چې د ټولو حدونو توانونه يې سره مساوي وي، متجانس پولینوم دی.

پوښتنې

1- په لاندې افادو کې مونوم، باينوم او ترينوم وښياست او درجې يې پيدا کړئ.

$\frac{1}{2}x^2y^5$, x^2-y+4 , $x-1$

$x-x^2-x^3$, $12x$, -12

2- په لاندې پولينومونو کې مکمل او ناقص پولينومونه وښياست او بيا ناقص پولينومونه د مکملو پولنيومونو په شکل وليکئ.

x , $x+1$, x^2-1 ,

$2x^2-2x-2$, 15 , x^3+x-1

3- لومړى د لاندې پولينومونو درجې پيدا کړئ او بيا يې په نزولي ډول ترتيب کړئ.

$4x-5+6x^2+8x^3$

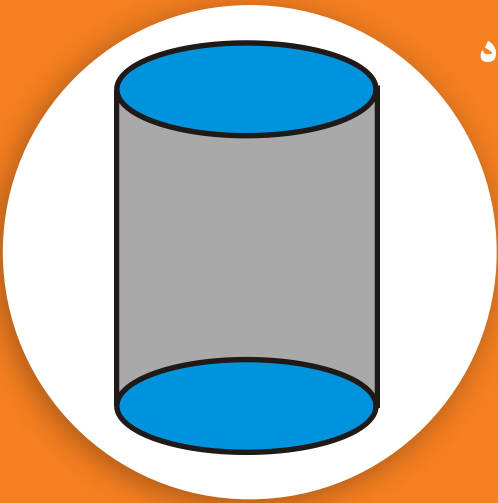
$2y^2-4y+3-3y^4+y^3$

$1-x^3+x^2+2x^4-x^5+x$

4- که $P(x-1)^2+n(x+3)+c=2x^2-x+22$ وي د n,p او c قيمتونه پيدا کړئ.

5- د b,a او c قيمتونه پيدا کړئ که $P(x)=7x^4-(2a-3)x^3+5x-(c-3)$ او $Q(x)=(3b+4)x^4+2x^3+5x$ معادل پولينومونه وي.

6- که $5xy^2+8x^pz-3y^{m-3}z^2$ يو متجانس پولينوم وي، د m او p قيمتونه پيدا کړئ.



د پولينوم د قيمت او د پولينوم د ضريبونو د مجموعې پيدا کول

آيا ويلای شئ د $x=-1$ لپاره د

$P(x)=x^3-x^2-x-1$ پولينوم قيمت

څو دی؟ يا $P(-1)=?$

که په يوه پولينوم کې د متحول پر ځای يو حقيقي عدد (د متحول خاص قيمت) وضع کړو، يو حقيقي عدد به لاس راځي چې دا حقيقي عدد دې پولينوم قيمت دی. د $x=2$ لپاره د $P(x)=3x+2$ پولينوم قيمت $P(2)=3\cdot2+2=8$ دی.

لومړی مثال: د $P(x)=2x^2-7x+1$ پولينوم قيمتونه د $P(5)$، $P(-1)$ او $P(0)$ لپاره پيدا کړئ.

حل:

$$P(5)=2\cdot5^2-7(5)+1=50-35+1=51-35=16$$
$$P(0)=1$$
$$P(-1)=2(-1)^2-7(-1)+1=2+7+1=10$$

فعاليت

د $P(x)=x^5-x^3-x-1$ پولينوم لپاره $P(0)$، $P(-1)$ او $P(1)$ پيدا کړئ.

دويم مثال: که $P(x)=16x^3-8x^2+\frac{3}{4}$ وي، نو $P(-\frac{1}{4})$ پيدا کړئ.

حل:

$$P(-\frac{1}{4})=16(-\frac{1}{4})^3-8(-\frac{1}{4})^2+\frac{3}{4}=16(-\frac{1}{64})-8(\frac{1}{16})+\frac{3}{4}$$
$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{-1-2+3}{4}=\frac{-3+3}{4}=\frac{0}{4}=0$$

دریم مثال: لکه: څرنګه چې پوهېږئ د دایرې محیط (Circumference) د

$C=2\pi r$ له فورمول څخه لاس ته راځي چې که چېرې $\pi=\dfrac{22}{7}$ او د دایرې شعاع

$r=3\dfrac{1}{2}cm$ وي، نو د دې دایرې محیط (C) پیدا کړئ.

حل

$$C=2\pi r=2\cdot\frac{22}{7}\cdot\frac{7}{2}cm=22cm$$

څلورم مثال: که b,a او c د مثلث د ضلعو اوږدوالی او p د مثلث د محیط نیمایي وي یعني

$p=\dfrac{a+b+c}{2}$، د مثلث مساحت د دې فورمول په واسطه لاس ته راځي.

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

که په یوه مثلث کې د ضلعو اوږدوالی $b=12cm,\ a=9cm$ او $c=15cm$ وي، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{9+12+15}{2}=\frac{36}{2}=18cm$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{18(18-9)(18-12)(18-15)}$$

$$=\sqrt{18\cdot9\cdot6\cdot3}=\sqrt{2\cdot9\cdot9\cdot2\cdot3\cdot3}=\sqrt{2^2\cdot3^2\cdot9^2}=2\cdot3\cdot9=54cm^2$$

فعالیت

د استوانې حجم د $V=\pi r^2h$ له فورمول څخه لاس ته راځي چې V د استوانې حجم، r د قاعدې شعاع او h د استوانې لوړوالی دی. که دیوې استوانې $r=5cm$ او $h=21cm$ وي، ددې استوانې حجم پیدا کړئ.

د پولینوم د ضریبونو د مجموعې پیدا کول:

که $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ وي، د ضریبونو مجموعه یې $a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0$ ده.

پنځم مثال: د $p(x)=2x^3+5x^2-3x+1$ پولینوم د ضریبونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل: $p(1)$ پیدا کوو: $P(1)=2\cdot1^3+5\cdot1^2-3\cdot1+1=2+5-3+1=5$

که پولینوم له څو تورو څخه جوړ شوی وي، د هر توري پر ځای یو (1) وضع کوو، لکه: د $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$ د ضریبونو د مجموعې د پیداکولو لپاره د x او y پر ځای یو (1) وضع کوو:

$$1^4+4\cdot1^3\cdot1+6\cdot1^2\cdot1^2+4\cdot1\cdot1^3+1^4=1+4+6+4+1=16$$

شپږم مثال: د $(x-3y)^4$ د ضریبونو مجموعه پیدا کړئ.

حل:

$$(1-3\cdot1)^4=(1-3)^4=(-2)^4=16$$

اووم مثال: د $(7x^2-5x-1)^{600}(2x^3-1)^{17}(x+2)^4$ د ضریبونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل:

$$(7\cdot1^2-5\cdot1-1)^{600}(2\cdot1^3-1)^{17}(1+2)^4=(1)^{600}(1)^{17}(3)^4=81$$

اتم مثال: که ددې توپ شعاع 6cm وي، ددې توپ حجم پیدا کړئ.



حل:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(6cm)^3=\frac{4}{3}\pi(216cm^3)=288\pi cm^3$$

د x د راکړل شوي قیمت لپاره د $P(x)$ په پولینوم کې د x پر ځای راکړل شوی قیمت وضع کوو، د پولینوم قیمت په لاس راځي که په یوه پولینوم کې د توري (متحول) پر ځای یو وضع شي د پولینوم د ضریبونو مجموعه په لاس راځي.

پوښتني

1. که $p(x)=-x^4-x^3-x^2-x-1$ وي $p(-1)$ او $p(\frac{1}{2})$ پیداکړئ.

2. د $p(x)=kx^3-x^2+3x-1$ په پولینوم کې که $p(2)=17$ وي د k قیمت پیداکړئ.

3. که د mx^2-2x+1 د ضریبونو مجموعه 18 وي د m قیمت پیداکړئ.

4. د $x=-\frac{1}{2}$ لپاره د $p(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ پولینوم قیمت پیداکړئ.

5. د $A=x^2-4x+4$ ، $B=-4x^3+10x^2$ ، $C=-x+3x^4-6x^3$ او $D=x^2+4x-4$ په پولینومونو کې د $x=4$ لپاره د کوم پولینوم قیمت له 100 څخه زیات دی؟

a) C b) D c) A d) B

6. په لاندې پولینومونو کې د $x=5$ لپاره د کوم پولینوم قیمت تر ټولو زیات دی؟

a) x^2-2x+6

b) $3x^4+6x+12$

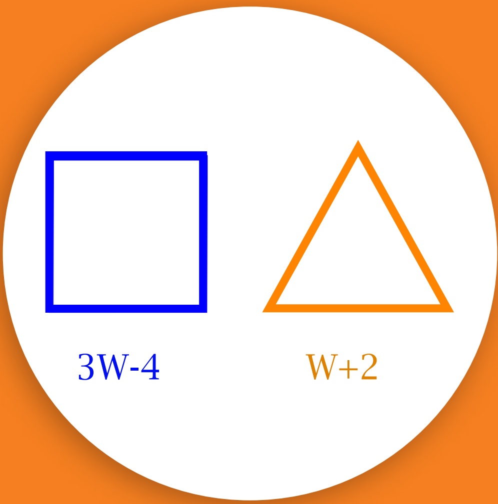
c) $-x^3-40x-300$

d) x^5-120x^4+10

7. که $p(x)=x^4-x^3-x^2-x-1$ وي، $p(-1)$ ، $p(0)$ ، $p(\frac{1}{2})$ او $p(-\frac{1}{2})$ پیداکړئ.

8. د $x=2$ لپاره د $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{8}x+\frac{7}{8}$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

د پولینوم څلورګوني عملیې



که د مربع هره ضلع $3w-4$ او د متساوي الاضلاع مثلث هره ضلع $w+2$ وي، یوه الجبري افاده ولیکئ چې د دواړو شکلونو محیط ښکاره کړي.

که $A=8x^2-2x+3$ او $B=9x-5$ وی، $A+B$ او $A-B$ پیدا کړئ.

1 **د جمعې عملیه**: مشابه حدونه (Like terms) یو له بل سره جمع کېږي او هم مشابه حدونه یو له بله تفریق کېږي، دا دواړه عملیې په افقي او عمودي ډول سر ته رسیدلای شي.

لومړی مثال: که $A=-3cd^2-2cd+5$ او $B=9cd-7cd^2-5$ وي $A+B$ پیداکړئ.

حل:

$$A+B=(-3cd^2-2cd+5)+(9cd-7cd^2-5)$$
$$=-3cd^2-2cd+5+9cd-7cd^2-5=-10cd^2+7cd$$

فعالیت

که $A=ab^2+3a$ ، $B=2ab^2+3a-2$ او $C=2a+4$ وي، د دې دریو واړو پولینومونو د جمعې حاصل پیدا کړئ. $(A+B+C=?)$

دویم مثال: جمع یې کړئ که: $A=1+2x+3x^2$ ، $B=3x-5-2x^2$ او $C=x^2-5x+4$ او هم که $A=a^4b-2a^3b^2-3a^2b^3-4c-2b$, $B=a^3b^2-2a^2b^3+4b-4$ او $C=a^4b+a^3b^2-2c$ وي.

حل: لومړی پولینومونه په منظم ډول لیکو او بیا مشابه حدونه سره جمع کوو.

$$\begin{array}{r} 3x^2+2x+1 \\ -2x^2+3x-5 \\ +\quad x^2-5x+4 \\ \hline 2x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a^4b-2a^3b^2-3a^2b^3-4c-2b \\ \quad a^3b^2-2a^2b^3+4b-4 \\ a^4b+a^3b^2-2c \\ \hline 2a^4b-5a^2b^3-6c+2b-4 \end{array}$$

2- **د تفریق عملیه**: د تفریق په عملیه کې د مفروق جمعي معکوس له مفروق منه سره جمع کوو. یا په بل عبارت د مفروق علامې تغیروو او له مفروق منه سره یې جمع کوو.

لومړی مثال: د B پولینوم د A له پولینوم څخه تفریق کړئ، که $A=-x^3+x^2+x-7$ او $B=-x^3+x^2+4x+3$ وی او هم که $A=2b^2-2c^2-2d^2-2e^2$ او $B=b^2-3c^2-3d^2-3e^2-f^2$ وي.

حل:

$$\begin{array}{l} A=-x^3+x^2+x-7 \\ -B=\mp x^3\pm x^2\pm 4x\pm 3 \\ \hline A-B=\qquad -3x-10 \end{array} \qquad \begin{array}{l} A=2b^2-2c^2-2d^2-2e^2 \\ B=\pm b^2\mp 3c^2\mp 3d^2\mp 3e^2\mp f^2 \\ \hline A-B=b^2+c^2+d^2+e^2+f^2 \end{array}$$

یا

$$-x^3+x^2+x-7-(-x^3+x^2+4x+3)$$
$$=-x^3+x^2+x-7+x^3-x^2-4x-3$$
$$=-3x-10$$

باید په یاد ولرو چې د یو پولینوم د ساده کولو لپاره مشابه حدونه (Like terms) سره جمع یا تفریقوو. د مثال په ډول

a) $x^2+6x^4-8+9x^2+2x^4-6x^2=8x^4+4x^2-8$

b) $3x-x-1+3-2x=2$

c) $2x^2-x-x^2-x-2=x^2-2x-2$

d) $6xy-xy-x-y+2x=5xy+x-y$

e) $mn-4+mn-5=2mn-9$

فعالیت

په لاندې پولینومونو کې مشابه حدونه (Like terms) وښیاست.

$-t+5t^2-6t^2+6t-3$ $\qquad$ $9rs-2r^2s^2+4r^2s^2+3rs-7$

$3p-4p^2+6p+10p^2$ $\qquad$ $2fg+f^2g-fg^2-2fg+3f^2g+5fg^2$

دويم مثال: د $a^4+2a^3b-3ab^3+a^2b^2$ له پولينوم سره کوم پولينوم جمع کړو چې د جمعې حاصل يې $2a^4-3a^3b-3ab^3-b^4+a^2b^2$ شي؟

حل:

$$\begin{array}{l} 2a^4-3a^3b+a^2b^2-3ab^3-b^4 \\ \underline{-a^4\pm 2a^3b\pm a^2b^2\mp 3ab^3} \\ a^4-5a^3b \qquad\qquad -b^4 \end{array}$$

فعالیت

د $4x+6-2x^2$ او $3x^2-x^3-3$ پولينومونو مجموعه د x^3+x^2-2x او $-2x^3+3x-7$ پولينومونو له مجموعې څخه تفريق کړئ.

دريم مثال: تفريق يې کړئ.

$$\begin{array}{l} 202x^4y-303x^3y^2-101x^2y^3-404xy^4-505y^5 \\ \underline{-101x^4y\mp 303x^3y^2\pm 101x^2y^3\mp 404xy^4\pm 505\,y^5} \\ 101x^4y \qquad -202x^2y^3 \qquad -1010y^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3ax-5bx-8cx-11dx \\ \underline{\pm 3ax\mp 5bx\mp 8cx\mp 11dx} \\ \qquad 0 \end{array}$$

څلورم مثال: مشابه حدونه (Like terms) سره جمع او ساده يې کړئ.

$8-10+x-7+x=2x-9$ $\qquad$ $20-k-k-10-6-k^2=-k^2-2k+4$

$ab+a-b-a=ab-b$ $\qquad$ $y^2-1+y^2-1=2y^2-2$

$$4b^3-2b^2-2+b-4b^3+b^2+b^2-b+2=0$$
$$x^2-5x-2x^2+5=-x^2-5x+5$$

باید په یاد ولرو چې که Q, P او R پولینومونه وي، نو

(د جمعې د عملیې تبدیلي خاصیت)...................... $P+Q=Q+P$

(د جمعې د عملیې اتحادي خاصیت)..... $P+(Q+R)=(P+Q)+R$

(د ضرب توزیعي خاصیت پر جمع باندې)......... $P(Q+R)=PQ+PR$

یا $(Q+R)P=QP+RP$

د پولینومونو د جمعې او تفریق په عملیو کې مشابه حدونه سره جمع او یا یو له بله تفریق کېږي د پولینومونو د جمعې په عملیه کې د تبدیلي او اتحادي خاصیتونه صدق کوي او د تفریق په عملیه کې د مفروق جمعې معکوس له مفروق منه سره جمع کېږي او د ضرب توزیعي قانون پر جمع باندې په پولینومونو کې هم صدق کوي.

پوښتنې

1. د دوو پولینومونو مجموعه x^2+2x-y^2 ده، که یو پولینوم $x^2-2xy+3$ وي، بل پولینوم پیدا کړئ.
2. د $3x^4+5x^3+2x^2-x+1$ پولینوم له $4x^4+2x^2+x^3-x+1$ پولینوم څخه تفریق کړئ.
3. د $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$، پولینوم څخه د $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ پولینوم تفریق کړئ.
4. که $A=a^3+2a^2-6a+7$, $B=a^3+2a+5$ او $C=2a^3-a^2+2a-8$ وي ددې درې واړو پولینومونو مجموعه پیدا کړئ. $(A+B+C=?)$
5. د $(ab^2+3a)+(2ab^2+3a-2)+(2a+4)$ افادې د جمعې حاصل مساوي دی، په:

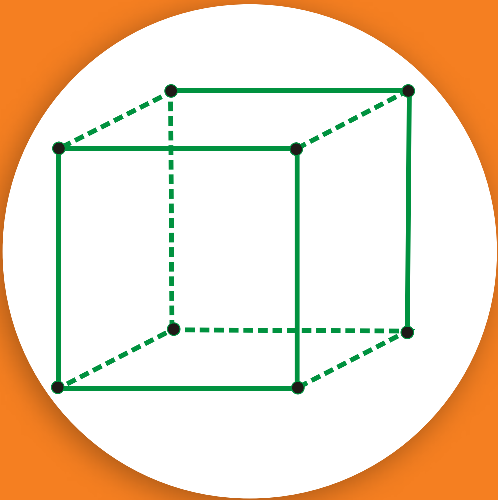
a) $-3ab^2+8a+2$ b) $3ab^2+8a$ c) $3ab^2+8a+2$

6. جمع یې کړئ.

$$(3a^2b^2+2a^2-5ab)+(-3ab+a^2-2)+(1+6ab)$$

7. که دوه الوتکې له یوه هوايي ډګر څخه یو د بل مخالف لورې ته والوزي، که 2 ساعتونه وروسته د یوې الوتکې واټن له هوايي ډګر څخه $x^2+2x+400$ میله وي او دبلې الوتکې واټن له هوايي ډګر څخه $3x^2-50x+100$ میله وي، ددې دواړو الوتکو تر منځ واټن(فاصله) پیدا کړئ.

د پولینومونو ضرب



د هغه مکعب حجم به څومره وي چې هره ضلع يې $(x+1)$ سانتي متره وي؟

د مونوم ضرب په مونوم کې: که د $3r^2s^3$ مونوم د $5r^4s^5$ په مونوم کې ضرب کړو، د ضرب حاصل يې $(3r^2s^3)(5r^4s^5)=15r^6s^8$ کيږي.

فعاليت

د $(7x^2y)(-3x^4yz^8)$ ، $(-\frac{1}{3}x)(-x)$ او $(-30a^2b)(-5ab)$ سره ضرب کړئ.

لومړی مثال: د لاندې مونومونو د ضرب حاصل پيدا کړئ.

$(-5y^a)(5y)=-25y^{a+1}$

$\frac{1}{4}(4)^2(\frac{1}{2})^2=(\frac{16}{4})(\frac{1}{4})=\frac{16}{16}=1$

$(-4s^2t^2)(2st^3)=-8s^3t^5$

$(-2a)^3(-2a)^2=-32a^5$

$-a^{2x}(-2a)=2a^{2x+1}$

$x(x^m)=x^{m+1}=x^{1+m}$

$(-\frac{1}{2}a)(-\frac{1}{2}a)=\frac{1}{4}a^2$

$(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)=\frac{125}{8}m^3n^3$

$(-0.1)(-0.1)(-0.1)=-0.001$

$(-a^b)(-a)=a^{b+1}=a^{1+b}$

$(-mn)(-mn^2)=m^2n^3$

$(0.01p)(0.01p)=0.0001p^2$

$(0.1x^2)(0.1x^2)=0.01x^4$

د مونوم ضرب په پولينوم کې:

دويم مثال: د ضرب لاندې حاصل لاس ته راوړئ.

$(2m^2n^3)(1-4mn^4)=2m^2n^3-8m^3n^7$

$x^3(x-x^2y^4)=x^4-x^5y^4$

$-3b(5b^4-8b+12)=-15b^5+24b^2-36b$

$-4s^2t^2(5s^2t+6st-2s^2t^2)=-20s^4t^3-24s^3t^3+8s^4t^4$

فعالیت

د هغه مکعب حجم پیداکړئ چې اوږدوالی یې، $2x$، سور یې x او لوړوالی یې $x+2$ وي.

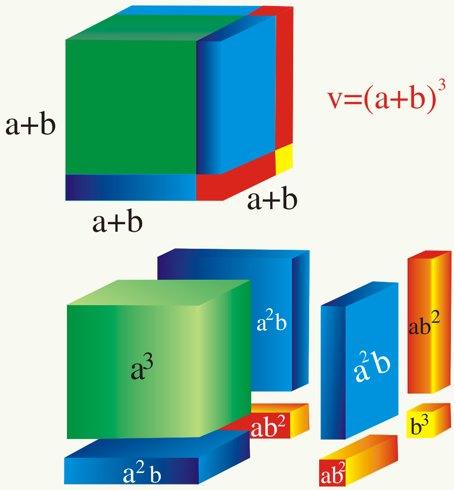
د پولینوم ضرب په پولینوم کې:

دریم مثال: **a:** د $(x-4)(x-5)$ د ضرب حاصل لاس ته راوړئ.

حل: $(x-4)(x-5) = x^2 - 5x - 4x + 20 = x^2 - 9x + 20$

	x	-4
x	x^2	$-4x$
-5	$-5x$	20

b) $(a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$



c: که $P(x) = x^3 + 2x$ او $Q(x) = 2x^2 - x + 1$ وي. $P(x) \cdot Q(x)$ پیداکړئ.

$$P(x) \cdot Q(x) = (x^3 + 2x) \cdot (2x^2 - x + 1)$$

$$= x^3 \cdot 2x^2 + x^3(-x) + x^3 \cdot 1 + 2x \cdot 2x^2 + 2x(-x) + 2x \cdot 1$$

$$= 2x^5 - x^4 + x^3 + 4x^3 - 2x^2 + 2x = 2x^5 - x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 2x$$

ځلورم مثال: لاندې افادې د a^3+b^3 او a^3-b^3 مطابقتونو په مرسته ضرب کړئ.

حل

$$a)\quad (x^m+y^n)(x^{2m}-x^my^n+y^{2n})=(x^m+y^n)[(x^m)^2-(x^m)(y^n)+(y^n)^2]$$
$$=(x^m)^3+(y^n)^3=x^{3m}+y^{3n}$$

$$b)\quad (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)(x-\sqrt{xy}+y)$$
$$=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{xy}+y)$$
$$=[(\sqrt{x})^3-(\sqrt{y})^3][(\sqrt{x})^3+(\sqrt{y})^3]=[(\sqrt{x})^3]^2-[(\sqrt{y})^3]^2$$
$$=(x^{\frac{3}{2}})^2-(y^{\frac{3}{2}})^2=x^3-y^3$$

په یاد ولرئ چې که P, Q او R پولینومونه وي

(د ضرب د تبدیلي خاصیت) $P\cdot Q=Q\cdot P$

(د ضرب اتحادي خاصیت) $P\cdot(Q\cdot R)=(P\cdot Q)\cdot R$

فعالیت

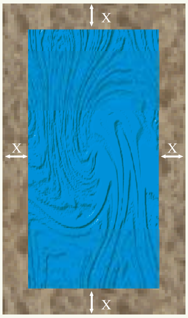
که $P(x)=2x^2-x-1$ او $Q(x)=4x-8$ وي، د ضرب د تبدیلي او اتحادي خاصیتونه په کې وڅېړئ.

په لاندې جدول کې د هندسي شکلونو مساحت (Area) پیدا کړئ.

مساحت	راکړ شوي اوږدوالی	هندسي شکلونه
n^2+n-20	اوږدوالی یې $n+5$ اوسور یې $n-4$	مستطیل
$6y^2+3y-3$	اوږدوالی یې $3y+3$ اوسور یې $2y-1$	مستطیل
$b^3-\frac{5}{2}b^2+2b-5$	قاعده یې $2b-5$ او لوړوالی یې b^2+2	مثلث
$m^2+26m+169$	هره ضلع یې $m+13$، ده	مربع
$4g^2-16g+16$	هره ضلع یې $2g-4$ ده	مربع
$(9c^2+12c+4)\pi$	شعاع یې $3c+2$ ده	دایره

فعالیت

د $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.



پوښتنه: د یوه حوض څلورو خواوو ته له سمنټو څخه پخه شوې لاره ده، که د دې لارې سور x متره وي او د حوض اوږدوالی او سور په ترتیب سره $50m$ او $25m$ وي د لارې مساحت معلوم کړئ.

حل: د لارې او حوض مجموعي مساحت

$$A=(25+2x)(50+2x)=1250+150x+4x^2$$

د حوض مساحت: $(25m)(50m)=1250m^2$

د لارې مساحت: $1250+150x+4x^2-1250=4x^2+150x$ د

پولینومونو په ضرب کې کېدای شي، مونوم په مونوم کې، مونوم په پولینوم کې او یا پولینوم په پولینوم کې ضرب کړو او د ضرب په عملیه کې د تبدیلی، اتحادي او د ضرب توزیعي خاصیت په جمع باندې هم صدق کوي.

پوښتنې

1.ضرب یې کړئ: $(4x^2y^2z)(-5xy^3z^2)$, $-2xy(2x^2+2y^2-2)$

2. یو بکس چې لوړوالی یې x انچه، اوږدوالی یې $(x+1)$ او سور یې $2x-4$ انچه دی، که لوړوالی یې 3 انچه وي، د دې بکس حجم مساوي دی، په:

a) $40in^3$ b) $24in^3$ c) $48in^3$ d) $20in^3$

3. د $(\frac{a^p}{a^{-q}})^{p-q}(\frac{a^q}{a^{-r}})^{q-r}(\frac{a^r}{a^{-p}})^{r-p}$ د ضرب حاصل مساوي دی، په:

a)1 b)-1 c) صفر d) درې واړه سم نه دي



د پولینوم وېش پر مونوم

آیا د

$$\frac{\frac{4m^2}{n}}{n} \;,\; \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} \;,\; \frac{3mn^2}{-mn} \;,\; \frac{-x^2}{x}$$

او د $\frac{-n^a}{n^b}$ او د $\frac{14x^5}{2x^2}$ د وېش حاصل په لاس راوړلای شئ؟(هیڅ یو مخرج له صفر سره مساوي نه دی).

د مونوم وېش پر مونوم (Dividing monomial by monomial):

لومړی مثال: ویې وېشئ:

$$\frac{36a^5b^5c^7}{12a^4bc^3} = 3ab^4c^4 \;,\; \frac{6x^9y^3}{4x^6y^2} = \frac{3}{2}x^3y \;,\; \frac{-a^2}{-a^x} = a^{2-x} \;,\; \frac{-n^a}{n^b} = -n^{a-b}$$

د پولینوم وېش پر مونوم:

$$(x^4 + 5x^3 - 7x^2) \div x^2$$

$$\frac{x^4 + 5x^3 - 7x^2}{x^2} = \frac{x^4}{x^2} + \frac{5x^3}{x^2} - \frac{7x^2}{x^2} = x^2 + 5x - 7 \qquad (x^2 \neq 0)$$

دویم مثال: ویې وېشئ.

$$\frac{x^8y^2 - x^4y^6 - 4x^3y^9}{x^3y} = x^5y - xy^5 - 4y^8 \qquad (x^3y \neq 0)$$

$$\frac{r^6s^2 - r^5s - 4r^3s^4}{r^2s} = r^4s - r^3 - 4rs^3 \qquad (r^2s \neq 0)$$

فعالیت

د وېش حاصل په لاس راوړئ. (مخرجونه خلاف د صفر دي)

$$a: \frac{27x^6y^{13} - 18x^{12}y^8}{9x^3y^8} \qquad b: \frac{x^2}{y^2 - 1} \div \frac{x^2}{y - 1} \qquad c: \frac{10b^3c^7}{6b^2c^7}$$

د پولینوم وېش پر پولینوم: څه وخت چې یو پولینوم پر بل پولینوم وېشو، مقسوم (Dividend) او مقسوم علیه (Divisor) دواړه باید په منظم ډول ترتیب شي.

دریم مثال: د $(13x+2x^4+12+3x^3-4x^2)\div(3+x^2-2x)$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4+3x^3-4x^2+13x+12 & x^2-2x+3 \\ \cline{2-2}
\pm 2x^4 \mp 4x^3 \pm 6x^2 & 2x^2+7x+4 \\ \cline{1-1}
7x^3-10x^2+13x & \\
\pm 7x^3 \mp 14x^2 \pm 21x & \\ \cline{1-1}
4x^2-8x+12 & \\
\pm 4x^2 \mp 8x \pm 12 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

فعالیت

د $(a^5+b^5)\div(a+b)$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

څلورم مثال: د وېش حاصل یې پیدا کړئ $(x^3-19x-30)\div(x+3)$.

حل:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 \quad -19x-30 & x+3 \\ \cline{2-2}
\underline{-}x^3 \pm 3x^2 & x^2-3x-10 \\ \cline{1-1}
-3x^2-19x & \\
\mp 3x^2 \mp 9x & \\ \cline{1-1}
-10x-30 & \\
\mp 10x \mp 30 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

پنځم مثال: د $4x^3-10x^2+12x+6$ له پولینوم سره کوم عدد جمع کړو چې په $(2x+1)$ پوره ووېشل شي؟

حل

$$
\begin{array}{l|l}
4x^3-10x^2+12x+6 & 2x+1 \\
\underline{-4x^3 \pm 2x^2} & 2x^2-6x+9 \\
\quad -12x^2+12x & \\
\quad \underline{\mp 12x^2 \mp 6x} & \\
\qquad\qquad 18x+6 & \\
\qquad\qquad \underline{-18x \pm 9} & \\
\qquad\qquad\quad -3 &
\end{array}
$$

په نتیجه کې چې که له پورتني پولینوم سره 3 جمع کړو، نو په $(2x+1)$ پوره د وېشلو وړ دی.

باید پام مو وي، د وېش عملیې ته به تر هغو پورې دوام ورکوو چې پاتې(باقي مانده) صفر او یا د باقي مانده درجه د مقسوم علیه له درجې څخه د یو په ا ندازه کمه شي.

فعالیت

د دوو پولینومونو د ضرب حاصل $6y^3-11y^2+6y-1$ دی. که یو پولینوم $3y^2-4y+1$ وي، بل پولینوم پیدا کړئ.

شپږم مثال: د x په کوم قیمت $12x^4+3x^3-13x^2+x+5$ پولینوم پر $3x^2-1$ باندې پوره وېشل کېږي؟

حل

$$
\begin{array}{l|l}
12x^4+3x^3-13x^2+x+5 & 3x^2-1 \\
\underline{-12x^4 \quad \mp 4x^2} & 4x^2+x-3 \\
\quad 3x^3-9x^2+x & \\
\quad \underline{-3x^3 \quad \mp x} & \\
\qquad -9x^2+2x+5 & \\
\qquad \underline{\mp 9x^2 \quad \pm 3} & \\
\qquad\qquad 2x+2 &
\end{array}
$$

$$2x+2=0$$
$$2x=-2$$
$$x=-1$$

نو د $x=-1$ لپاره پورتنی پولینوم پر $3x^2-1$ پوره وېشل کېږي.

د پولینومونو په وېش کې کېدای شي چې مونوم پر مونوم، پولینوم پر مونوم او یا پولینوم پر پولینوم ووېشو. لومړی باید مقسوم او مقسوم علیه په نزولي ډول ترتیب شي او د وېش عملیې ته تر هغه پورې دوام ورکوو، تر څو د پاتې (باقي) درجه د مقسوم علیه له درجې څخه د یو په اندازه کمه شي.

پوښتنې

1. د P په کوم قیمت $3x^3-7x^2-9x+p$ پولینوم پر $x-13$ پوره وېشل کېږي؟

2. د وېش حاصل یې پیدا کړئ.

$(a^3+b^3+c^3-3abc)\div(a+b+c)$

$(x^2+x-6)\div(x-2)$

$(x^5-y^5)\div(x-y)$

$\dfrac{j^5k^2-3j^8k^4}{2j^4k}$

$\dfrac{12x^5+9x^4+15x^2}{3x^3}$

$\dfrac{27a^6b^{13}-18a^{12}b^8}{9a^3b^8}$

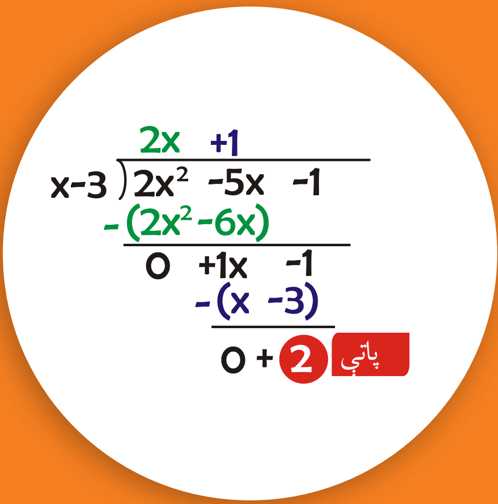
$(x^3-a^3)\div(x^2-ax+a^2)$

$(9x^4+2x^2+7x+2)\div(3x+2)$

$(8x^3+27y^3)\div(2x+3y)$

$(7x-12+2x^4-8x^3-x^2)\div(2x^2+5)$

د باقي مانده قضیه
(Remainder Theorem)



آیا د ویش د عملیې له سرته رسولو پرته ویلای شئ چې که د x^3-6x^2-x-6 پولینوم په $x-4$ وویشو پاتې(باقي) به څو وي؟

که د $P(x)$ پولینوم په $x-a$ وویشل شي باقي (پاتې) د $P(a)$ سره مساوي ده. یا $R=P(a)$

لومړی مثال: که د $P(x)=2x^2+3x+4$ پولینوم پر $(x+3)$ وویشل شي، نو باقي (Remainder) له $P(-3)$ سره مساوي ده.

حل: $P(-3)=2(-3)^2+3(-3)+4=13$

اوس یې ازمایو او د ویش عملیه سرته رسوو.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^2+3x+4 & x+3 \\ \cline{2-2}
\underline{-2x^2\pm 6x} & 2x-3 \\
-3x+4 & \\
\underline{\mp 3x\mp 9} & \\
13 &
\end{array}
$$

قضیه: که د $P(x)$ پولینوم په $(x-a)$ وویشو، نو باقي یا پاتې $R=P(a)$ ده.

ثبوت: که د $P(x)$ پولینوم په $(x-a)$، وویشو او خارج قسمت $Q(x)$ او پاتې R وي، نو لرو چې:

$$
\begin{array}{ll}
P(x)=Q(x)(x-a)+R & x-a=0 \\
P(a)=Q(a)(a-a)+R & x=a \\
P(a)=R &
\end{array}
$$

دویم مثال: که د $2x^3-x^2-7$ پولینوم پر $(x-2)$ وویشل شي، پاتې به څو وي؟

حل:

$$P(2)=2(2)^3-(2)^2-7=16-4-7=5$$
$$R=5$$

فعالیت

د پورتنی قضیې په مرسته یې پاتې(باقي مانده) پیدا کړئ.

- که $x^3-x^2-226x+1410$ پر $(x+17)$ وویشل شي.
- که x^3-2x^2+3x+5 پر $(x-4)$ وویشل شي.
- که $x^3+18x^2+164x+199$ پر $(x+8)$ وویشل شي.

دریم مثال: که د $5x^2+x-9$ پولینوم پر $(x+\frac{1}{2})$ وویشل شي، د وېش د عملیې له سرته رسولو څخه پرته وواياست چې څو پاتې کېږي؟

حل

$$x+\frac{1}{2}=0$$
$$x=-\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2})=5(-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}-9$$
$$=5(\frac{1}{4})-\frac{1}{2}-9=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}-9=\frac{5-2-36}{4}=-\frac{33}{4}$$

څلورم مثال: که د $P(y)=10y^3+7y^2-y-11$ پولینوم پر $(2y+1)$ وویشو، د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته یې پاتې(باقي) پیدا کړئ.

حل

$$2y+1=0\Rightarrow 2y=-1$$
$$\Rightarrow y=-\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2})=10(-\frac{1}{2})^3+7(-\frac{1}{2})^2-(-\frac{1}{2})-11$$
$$P(-\frac{1}{2})=10(-\frac{1}{8})+7(\frac{1}{4})+\frac{1}{2}-11$$
$$=-\frac{5}{4}+\frac{7}{4}+\frac{1}{2}-11=\frac{-5+7+2-44}{4}=\frac{-40}{4}=-10$$
$$R=-10$$

فعالیت

د 4 مثال په پوښتنه کې د وېش عملیه سرته ورسوئ او باقي يې په لاس راوړئ.

پنځم مثال: که د $4x^4+12x^3-13x^2-33x+18$ پولینوم پر $(x+4)$ ووېشل شي، باقي يې پيدا کړئ.

حل:

$$P(-4)=4(-4)^4+12(-4)^3-13(-4)^2-33(-4)+18$$
$$=1024-768-208+132+18=1174-976=198$$

اوس د وېش عملیه سرته رسوو.

$$\begin{array}{l|l} 4x^4+12x^3-13x^2-33x+18 & x+4 \\ \hline \underline{-4x^4\pm16x^3} & 4x^3-4x^2+3x-45 \\ \quad -4x^3-13x^2 & \\ \quad \underline{\mp4x^3\mp16x^2} & \\ \qquad 3x^2-33x & \\ \qquad \underline{\pm3x^2\pm12x} & \\ \qquad\quad -45x+18 & \\ \qquad\quad \underline{\mp45x\mp180} & \\ \qquad\qquad 198 & \end{array}$$

که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشل شي، د وېش د عملیې له سر ته رسوولو پرته يې د باقي مانده قضيې (Remainder Theorem) په مرسته باقي پيدا کولای شو چې باقي مانده (R) له (a) P سره مساوي ده.

پوښتنې

1.د باقي مانده قضيې (Remainder theorem) په مرسته يې باقي (پاتې) پيدا کړئ.

$$(5x^3 - x^2 + 4x + 1) \div (x - 3) \quad , \quad (6p^3 + 2p^2 - p + 20) \div (p - \frac{1}{2})$$

$$(6x^2 + 15) \div (4x + 9) \quad , \quad (4y^2 - y - 6) \div (y - 1.6)$$

2. د باقي مانده قضيې په مرسته ووایاست چې د k په کوم قیمت د $5x^3 - k^2x^2 + 3kx - 6$ پولینوم پر $(x+2)$ وویشل شي، تر څو -44 باقي شي؟

3. د k په کوم قيمت که د $2k^2y^4 - ky^2 + 1$ پولينوم، پر $(y - \frac{1}{2})$ وویشل شي، ترڅو 2 باقي شي؟

4. که چیرې $m^2x^4 - 10x^2 + 2$ پولينوم پر $(x-1)$ وویشو او باقي 17 وي، د m قيمت به څو وي؟

د فکتور قضیه
(The Factor Theorem)

$(x^5+1)\div(x+1)$

$P(-1)=[(-1)^5+1]$
$=-1+1=0$

آیا $(x-1)$ د $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ پولینوم یو فکتور دی؟

که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ وویشل شي او $P(a)=0$ شي، نو $x-a$ ددې پولینوم یو فکتور دی.

ثبوت: د باقي مانده قضیې په اساس $R=P(a)$ دی، نو که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ وویشل شي او د ویش حاصل(خارج قسمت) یې $Q(x)$ وي، نو لرو چې: $P(x)=Q(x)(x-a)+R$
که $R=0$ وي، نو: $P(x)=Q(x)(x-a)$

لیدل کیږي چې $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکتور دی. او یا که $(x-a)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکتور وي، نو $P(a)=0$ دی.

لومړی مثال: وښیاست چې $(x-2)$ د $P(x)=x^3+3x^2+4x-28$ د پولینوم یو فکتور دی.

حل

$x-2=0$ $\qquad P(x)=x^3+3x^2+4x-28$

$x=2$ $\qquad P(2)=2^3+3(2)^2+4\cdot2-28=8+3(4)+8-28=0$

څرنګه چې R یا $P(2)=0$ دی، نو $(x-2)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکتور دی.

فعالیت

د ویش د عملیې له سرته رسولو پرته، د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $x-1$ د $P(x)=2x^3-13x^2+26x-15$ پولینوم یو فکتور دی.

دویم مثال: د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-2)$ د $P(x)=x^5-32$ پولینوم یو فکتور دی.

حل

$P(x) = x^5 - 32$

$P(2) = 2^5 - 32 = 32 - 32 = 0$

څرنګه چې $R = P(2) = 0$ ده، نو $(x-2)$ د $x^5 - 32$ پولينوم يو فکتور دی.

دريم مثال: وښياست چې $(x+1)$ د $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 7x + 4$ پولينوم يو فکتور دی.

حل: $P(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1)^2 + 7(-1) + 4 = -2 + 5 - 7 + 4 = 0$

څرنګه چې R يا $P(-1)$ له صفر سره مساوي دی، نو $(x-1)$ د دې پولينوم يو فکتور دی.

څلورم مثال: د k په کوم قيمت، $(x-1)$ د $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - x - 2k$ پولينوم يو فکتور دی؟

حل

$P(1) = 2(1)^4 - 3(1)^3 - 1 - 2k = 2 - 3 - 1 - 2k = -2 - 2k$

$-2 - 2k = 0$

$-2k = 2$

$k = -1$

د $k = -1$ لپاره باقي مانده صفر کېږي، نو $x - 1$ د دې پولينوم يو فکتور دی.

فعاليت

د فکتور د قضيې په مرسته وښياست چې آيا د کيڼې خوا دوه حدې (باينومونه) د اړوندو پولينومونو فکتورونه دي او که نه؟

$(y+5) : (y^3 + 125)$

$(x-6) : (x^6 - 36x^3 + 1296)$

$(x - \frac{1}{2}) : (x^3 - \frac{1}{8})$

$(x + \frac{1}{2}) : (20x^3 + 7x + 6)$

$(x+2) : (x^5 + 32)$

$(x - 0.1) : (10x^3 - 11x^2 + 1)$

د فکتور د قضيې معکوس (Converse of Factor Theorem):

که $(x-a)$ د $P(x)$ پولينوم يو فکتور وي، نو $P(a) = 0$ دی او د a عدد د $P(x) = 0$ پولينومي معادلې يو جذر (Root) دی.

لومړی مثال: که $(x-2)$ د $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ پولينوم يو فکتور وي، نو

وښیاست چې $P(2)=0$ دی او 2 د $x^3-6x^2+11x-6=0$ معادلې یو جذر دی.

حل: که 2 د $x^3-6x^2+11x-6=0$ معادلې یو جذر وي، نو $(x-2)$ ددې پولینوم یو فکتور دی $P(2)=0$ دی.

$$P(2)=2^3-6(2)^2+11(2)-6=8-24+22-6=0$$

دویم مثال: که -2 د $x^3+4x^2+kx+8=0$ معادلې یو جذر وي، د k قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$(-2)^3+4(-2)^2+k(-2)+8=0$$
$$-8+16+k(-2)+8=0$$
$$-2k=-8+8-16$$
$$k=8$$

دریم مثال: وښیاست چې 3 د $x^3-6x^2+5x+12=0$ پولینومي معادلې یو جذر دی.

حل:

$$(3)^3-6(3)^2+5(3)+12=0$$
$$27-54+15+12=0$$
$$54-54=0$$
$$0=0$$

نو لیدل کېږي چې 3 ددې پولینومي معادلې یو جذر دی.

فعالیت

وښیاست چې 2 د $x^3-4x^2+5x-2=0$ معادلې یوجذر دی.

څلورم مثال: د k د کوم قیمت لپاره 3 د $2x^4-6x^3-7x^2+kx-15=0$ معادلې یو جذر دی؟

حل:

$$2(3)^4-6(3)^3-7(3)^2+3k-15=2(81)-6(27)-7(9)+3k-15=0$$
$$162-162-63+3k-15=0$$
$$3k=15+63+162-162=78$$
$$3k=78$$
$$k=26$$

که (x–a) د $P(x)$ پولینوم یو فکټور وي، نو $P(a)=0$ دی او که د $P(x)$ په پولینوم کې $P(a)=0$ شي نو $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکټور دی.

پوښتني

1 - د k د کوم قیمت لپاره $(x-2)$ د $P(x)=2x^4-x^3+kx^2+kx-12$ پولینوم یو فکټور دی؟

2 - آیا $(x+3)$ د $P(x)=x^5-x^3+27x^2-27$ پولینوم یو فکټور دی؟

3 - د فکټور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x+7)$ د $P(x)=x^3+8x^2+8x+7$ د پولینوم یو فکټور دی، که نه؟

4- د وېش د عملیې د سرته رسولو پرته وښیاست چې آیا $(y-7)$ د $P(y)=y^4+2y^3-6y^2-14y-7$ پولینوم یو فکټور دی که نه؟

5- وښیاست چې آیا $(m+\frac{1}{2})$ د $P(x)=2m^2+4m-2$ پولینوم یو فکټور دی که نه؟

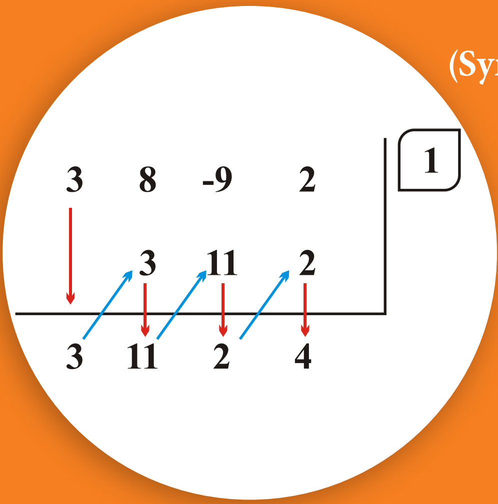
6- د $x^3+x^2-10x+8$ پولینوم د فکټور د قضیې په مرسته تجزیه کړئ.

7- که $(x-1)$ او $(x+1)$ د $P(x)=x^3+ax^2+bx+2$ د پولینوم فکټورونه وي، د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

8- د k، د کوم قیمت لپاره $(x-5)$ د $Q(x)=x^3-5x^2-16x+k$ پولینوم یو فکټور دی؟

9 - د k د کوم قیمت لپاره (-1)، د $x^3-9x^2+14x+k=0$ پولینومي معادلې یو جذر دی؟

ترکیبي وېش
(Synthetic Division)



1

آیا د وېش عملیې له سرته رسولو پرته، د وېش حاصل او باقي پیداکولای شئ.
که د $P(x)=2x+3x^3-x^2-5$ پولینوم پر $(x-2)$ وویشل شي؟

د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$، د وېشلو لپاره ترکیبي وېش (Horner's Method) یوه لنډه طریقه ده چې په عمومي ډول د دې هدفونو لپاره ترې کار اخیستل کېږي.

1 – د x د مختلفو قیمتونو لپاره د $P(x)$ پولینوم د قیمت پیداکول.

2 – د $P(x)=0$ معادلې د ناطق جذر د پیداکولو لپاره.

3 – د الجبري افادو د تجزیې لپاره.

لومړی مثال: که د $P(x)=4x^4+12x^3-13x^2-33x+18$ پولینوم پر $(x+4)$ باندې ووېشو د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته د ترکیبي وېش (تقسیم) په مرسته یې د وېش حاصل (Quotient) او باقي مانده (Remainder) پیداکړئ.

حل:

لومړی کرښه	4	12	−13	−33	18	−4	$x+4=0$
دویمه کرښه		−16	16	−12	180		$x=-4$
دریمه کرښه	4	−4	3	−45	198		

چې د وېش حاصل (خارج قسمت) یې $4x^3-4x^2+3x-45$ او پاتې یا باقي مانده یې 198 ده، په دې معنا چې: $P(x)=(x+4)(4x^3-4x^2+3x-45)+198$

پورتنی عملیه په لاندې پړاوونو کې ښودلای شو.

د لومړۍ کرښې عددونه د مقسوم ضریبونه دي چې نظر د x توان ته په نزولي ډول ترتیب شوي دي.

1. د 4 عدد له لومړۍ کرښې څخه درېمې کرښې ته راښکته شوی دی.

2. 4 په (4−) کې ضرب شوی دی چې (16−) کېږي او (16−) د 12 د عدد لاندې په دویمه کرښه کې لیکل شوی دی.
3. د 12 او (16−) د جمعې حاصل چې (4−) کېږي، په دریمه کرښه کې لیکو.
4. د(4−) عدد په (4−) کې ضربوو چې 16 کېږي او د (13 −) لاندې یې په دویمه کرښه کې لیکو.
5. د16 او (13−) د جمعې حاصل چې 3 کېږي، په دریمه کرښه کې لیکل شوی دی.
6. د 3 او (4−)د ضرب حاصل چې (12−) کېږي، د (33-) لاندې په دویمه کرښه کې لیکل شوی دی.
7. د(33−) او (12−) د جمعې حاصل چې (45 −) کېږي، په دریمه کرښه کې لیکو.
8. د(45−) او (4−) د ضرب حاصل چې 180 کېږي، تر 18 لاندې په دویمه کرښه لیکل شوی دی.
9. د180 او 18 د جمعې حاصل 198 په دریمه کرښه کې دی، 198باقی مانده دی او $4x^3-4x^2+3x-45$ د وېش حاصل دی.

$Q(x)=4x^3-4x^2+3x-45$ او $R=198$

$P(x)=(4x^3-4x^2+3x-45)(x+4)+198$

پاتې + (د وېش حاصل)x (مقسوم علیه)= مقسوم

فعالیت

د وېش عملیې د سرته رسولو په مرسته د پورتنې پوښتنې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

دویم مثال: د ترکیبي وېش او د وېش د عملیې د سرته رسولو په مرسته یې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

$(4x^4-5x^2+2x-3)\div(x-2)$

په یاد ولرئ کوم حدونه چې موجود نه وي، د هغوی د ضریبونو پر ځای صفر لیکو یا په بل عبارت پولینوم د مکمل پولینوم په شکل په نزولي ډول ترتیبوو.

4	0	−5	2	−3	2
	8	16	22	48	
4	8	11	24	45	

اوس د وېش عملیه سرته رسوو:

$$\begin{array}{l|l} 4x^4 \quad -5x^2+2x-3 & x-2 \\ \underline{-4x^4 \mp 8x^3} & \overline{4x^3+8x^2+11x+24} \\ \quad 8x^3-5x^2 & \\ \quad \underline{-8x^3 \mp 16x^2} & \\ \qquad 11x^2+2x & \\ \qquad \underline{-11x^2 \mp 22x} & \\ \qquad\quad 24x-3 & \\ \qquad\quad \underline{-24x \mp 48} & \\ \qquad\qquad 45 & \end{array}$$

د وېش حاصل $4x^3+8x^2+11x+24$ او باقي (45) ده.

دریم مثال: $(x^5-x^3+27x^2-28)\div(x+3)$ د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او پاتې(باقي) پیدا کړئ.

حل: $x^5-x^3+27x^2-28 = x^5-0\cdot x^4-x^3+27x^2+0\cdot x-28$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 27 & 0 & -28 & -3 \\ & -3 & 9 & -24 & -9 & 27 & \\ \hline 1 & -3 & 8 & 3 & -9 & -1 & \end{array}$$

$x+3=0$

$x=-3$

د وېش حاصل(خارج قسمت) یې $x^4-3x^3+8x^2+3x-9$ او پاتې(باقي مانده) عبارت له (1−) څخه دی.

څلورم مثال: د $(2t^3-7t^2-2t+14)\div(2t-3)$ د وېش حاصل(خارج قسمت) او پاتې (باقي) پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -7 & -2 & 14 & \frac{3}{2} \\ & 3 & -6 & -12 & \\ \hline 2 & -4 & -8 & 2 & \end{array}$$

$$\frac{2t-3}{2} = t-\frac{3}{2}$$

$$t-\frac{3}{2}=0$$

$$t=\frac{3}{2}$$

نو $2t^2-4t-8$ د وېش حاصل نه دی، بلکې د وېش حاصل (t^2-2t-4) دی. (مقسوم او مقسوم علیه دواړه په 2 وېشل شوي دي).

پنځم مثال: د ترکیبي وېش (Synthetic division) په مرسته د وېش حاصل (quotient) او پاتې يې (remainder) پيدا کړئ.

$$(4V^3-2V^2+5)\div(V-5)$$

4	−2	0	5	
	20	90	450	5
4	18	90	455	

نو $Q(x)=4v^2+18v+90$ او $R=455$ ده.

فعاليت

د ترکیبي وېش په مرسته يې د وېش حاصل او پاتې پيدا کړئ.

$$(x^5+6x^3-5x^4+5x-15)\div(x-3)$$

که د P(x) پولینوم پر (x-a) باندې ووېشو، نو مقسوم د مکمل نزولي پولینوم په شکل ترتیبوو او د ترکیبي وېش په مرسته يې د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته د وېش حاصل او باقي مانده لاس ته راوړلای شو چې د وېش د حاصل درجه د یوه په اندازه د مقسوم علیه له درجې څخه کمه ده.

پوښتنې

1- د ترکیبي وېش په مرسته يې د وېش حاصل او باقي مانده پيدا کړئ.

$(2x^3-7x^2-2x+12)\div(2x-3)$ $\qquad$ $(10x^2+2x+1)\div(x+1)$

$(6x^2+15)\div(4x+9)$ $\qquad$ $(5x^3-3x+7)\div(x+4)$

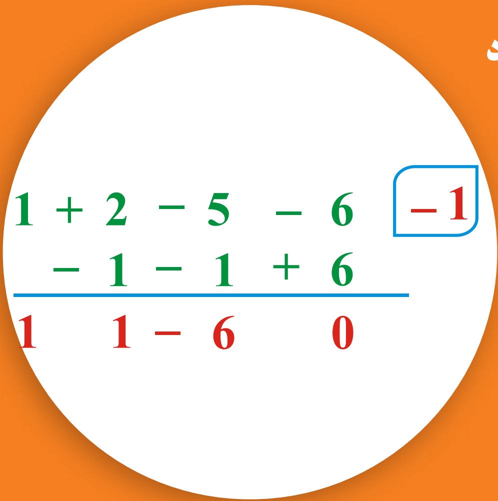
$(6p^3+2p^2-p+20)\div(p-\frac{1}{2})$

2- د ترکیبي وېش په مرسته يې پاتې (باقي مانده) او د وېش حاصل پيدا کړئ.

$(4x^3-2x^2+5)\div(x-5)$, $(y^5-17y^3-9)\div(y-3)$

$(x^3+8x^2+8x+7)\div(x+7)$

د ترکيبي وېش په مرسته د پولينوم د فکتور او د پولينوم د قيمت پيدا کول



آيا د ترکيبي وېش په مرسته ويلای شئ چې $(x+3)$ د $x^3+9x^2+27x+27$

پولينوم يو فکتور دی؟

لومړی مثال: د ترکيبي وېش په مرسته وښياست چې $(x-1)$ د $P(x)=2x^4-x^3-x^2+x-1$ پولينوم يو فکتور دی.

2	−1	−1	1	−1	1
	2	1	0	1	
2	1	0	1	0	

خرنګه چې $R=0$ دی، نو $(x-1)$ددې پولينوم يو فکتور دی. يا دا چې:

$$2x^4-x^3-x^2+x-1=(x-1)(2x^3+x^2+1)$$

يا د باقي مانده قضيې په مرسته:

$$P(1)=2\cdot1^4-1^3-1^2+1-1=2-1-1+1-1=0$$

دويم مثال: آيا $(x+10)$ د x^3+3x^2-150 پولينوم يو فکتور دی او که نه؟

1	3	0	−150	−10
	−10	70	−700	
1	−7	70	−850	

خرنګه چې $R=-850$ دی $(R\neq 0)$، نو $(x+10)$ د x^3+3x^2-150 پولينوم فکتور نه دی.

دريم مثال: که $P(x)=3x^3-12x^2+25+5x$ وی، د $x=2$ لپاره د ترکيبي وېش په مرسته ددې پولينوم قيمت پيدا کړئ.

حل: لومړی پولینوم په نزولي ډول ترتیبوو.

$$P(x) = 3x^3 - 12x^2 + 5x + 25$$

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & -12 & 5 & 25 & 2 \\ & 6 & -12 & -14 & \\ \hline 3 & -6 & -7 & 11 & \end{array}$$

نو: $P(2) = 11$ دی.

فعالیت

د ترکیبي وېش په مرسته د $P(x) = x^3 - x^2 + 10x + 5$ پولینوم قیمت د $x = 1$ او $x = 3$ لپاره پیدا کړئ.

څلورم مثال: د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې $(r-4)$ د $r^4 - 256$ یو فکتور دی.

$$r^4 - 256 = r^4 + 0 \cdot r^3 + 0 \cdot r^2 + 0 \cdot r - 256$$

حل:

$$r - 4 = 0$$

$$r = 4$$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 0 & 0 & 0 & -256 & \\ & 4 & 16 & 64 & 256 & 4 \\ \hline 1 & 4 & 16 & 64 & 0 & \end{array}$$

$$Q(x) = r^3 + 4r^2 + 16r + 64$$

$$R = 0$$

نو $(r-4)$ د $r^4 - 256$ یو فکتور دی.

د ترکیبي وېش په مرسته د یوې معادلې د جذرونو پیدا کول:

پنځم مثال: که د (1) عدد د $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ معادلې یو جذر وي، د ترکیبي وېش په مرسته یې نور جذرونه پیدا کړئ.

حل:

1	4	1	−6	
	1	5	6	1
1	5	6	0	

نو د وېش حاصل یې x^2+5x+6 دی.

$$x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x^2+5x+6)$$
$$x^2+5x+6=0$$
$$(x+3)(x+2)=0$$
$$x=-3 \qquad x=-2$$

د دې معادلې دوه نور جذرونه -2 او -3 دي.

د ترکیبي وېش په مرسته د پولینوم فکتور، د پولینوم قیمت او د پولینومي معادلې جذر پیداکولای شو، که چېرې د $P(x)$ پولینوم په $(x-a)$ ووېشو او $(R=0)$ وي، نو $(x-a)$ د دې پولینوم یو فکتور دی او د (a) عدد د $P(x)=0$ پولینومي معادلې یو جذر دی.

پوښتنې

1- د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې $(x+\frac{1}{2})$ د $20x^3+7x+6$ پولینوم یوفکتور دی او $(x+1)$ د x^4-2x^2+x+2 پولینوم یو فکتور دی.

2- آیا $(x-0{,}1)$ د $10x^3-11x^2+1$ د پولینوم یو فکتور دی؟ ولې؟

3- د ترکیبي وېش په مرسته د $6-y-6y^2+y^3$ پولینوم قیمت د $y=6$ لپاره پیداکړئ.

4- که (1) د $x^3+x^2-10x+8=0$ معادلې یو جذر وي، د ترکیبي وېش په مرسته یې نور جذرونه پیداکړئ.

5- که د (-2) عدد د $x^3+4x^2+kx+8=0$ معادلې یو جذر وي، د ترکیبي وېش په مرسته د k قیمت پیداکړئ؟

د څپرکي لنډيز

- الجبري افادې په درې ډوله دي(ناطقه الجبري افاده، غیر ناطقه الجبري افاده، پولینومي الجبري افاده).
- هغه حدونه چې متحولونه او درجې یې سره مساوي وي، مشابه حدونه (Like terms) نومېږي، لکه: $3x^2$ او $5x^2$ یا $4x^2y^2$ او $-6x^2y^2$ مشابه حدونه دي.
- پولینوم هغه یو یا څو حده الجبري افاده ده چې د حروفو توانونه یې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي.
- د یوه پولینوم درجه چې له یوه توري (متحول) څخه جوړ شوی وي، د هغه توري له لوړ توان څخه عبارت ده او که له یوه څخه د زیاتو تورو څخه جوړ شوی وي، د زیات توان لرونکي مونوم درجه ددې پولینوم درجه ده.
- د یوه حد عددي فکتور (Numerical Factor) ته ضریب وایي، لکه: په $3x^2$ کې 3 د x^2 ضریب دی.
- ټول ثابت عددونه پولینومونه دي چې ثابت پولینومونه نومېږي او درجه یې صفر ده، د صفري پولینوم درجه تعریف شوې نه ده.
- هغه پولینومونه چې یو متحول ولري او د مشابه حدونو ضریبونه یې سره مساوي وي، د معادلو پولینومونو په نوم یادېږي.
- د متحول په راکړ شوې قیمت کې د یوه پولینوم قیمت هغه عدد دی چې په پولینوم کې د متحول د راکړل شوې قیمت له وضع کېدو څخه په لاس راځي.
- هغه پولینومونه چې د متحول له لوړ توان څخه تر ثابت عدده پورې، ټول حدونه په کې موجود وي، مکمل پولینوم او که یو یا څو حدونه، ونه لري، د ناقص پولینوم په نوم یادېږي.
- که د یوه پولینوم متحول له ټیټ توان څخه تر لوړ توان پورې ترتیب شي، منظم صعودي او که له لوړ توان څخه تر ټیټ توان پورې ترتیب شي، منظم نزولي پولینوم نومېږي.
- د پولینوم د جمعې په عملیه کې مشابه حدونه (Like terms) یو له بل سره جمع کېږي، د تفریق

په عملیه کې د مفروق علامې ته تغیر ورکوو او نوره عملیه د جمعې د عملیې په شان سرته رسول کېږي (د مفروق جمعي معکوس له مفروق منه سره جمع کېږي.

• د پولینومونو د جمعې او ضرب په عملیو کې د تبدیلي او اتحادي خاصیتونه او هم د ضرب توزیعي خاصیت پر جمع باندې صدق کوي.

• د ضرب په عملیه کې کولای شو، مونوم په مونوم کې، مونوم په پولینوم کې او یا پولینوم په پولینوم کې ضرب کړو.

• په همدې ډول کولای شو، د وېش په عملیه کې مونوم پر مونوم، پولینوم پر مونوم یا پولینوم پر پولینوم باندې ووېشو.

• که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشو د باقي مانده قضیې په اساس پاتې(باقي) له $P(a)$ سره مساوي ده.

• که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشو او باقي صفر شي، نو $(x-a)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکتور دی.

• د فکتور د معکوسې قضیې په اساس که $(x-c)$ د $M(x)$ پولینوم یو فکتور وي، نو $P(c)=0$ او د c عدد د $M(x)=0$ پولینومي معادلې یو جذر دی.

• د ترکیبي وېش په مرسته کولای شو چې که $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشو، د وېش حاصل او باقي لاس ته راوړو او هم د ترکیبي وېش په مرسته د متحول په راکړ شوي قیمت کې د $P(x)$ د پولینوم قیمت پیدا کولای شو.

• د ترکیبي وېش په مرسته $P(x)=0$ د پولینومي معادلې جذرونه پیدا کولای شو.

• د باقي مانده قضیې په مرسته الجبري افاده هم تجزیه کولای شو.

د ځپرکي پوښتنې:

1 – د k قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ چې:

a: که $(x+5)$ د $P(x)=x^3+kx+125$ پولینوم یو فکتور وي.

b: که $(x-1)$ د $Q(x)=2x^4-3x^3-x-2k$ پولینوم یو فکتور وي.

c: که $(x-2)$ د $P(x)=x^3+3x^2-x+k$ پولینوم یو فکتور وي.

2 – د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل (Quotient) او پاتې (Remainder) پیدا کړئ.

$(5x^4-6x^2+3x-4)\div(x+4)$, $(x^5+4x^4+x^2-3x-28)\div(x+4)$

$(10x^2-31x+24)\div(x-\frac{3}{2})$, $(30x^3-20x^2-100x+1000)\div(x-10)$

3 – د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-1)$ د $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ د پولینوم یو فکتور دی.

4 – د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-\frac{1}{2})$ د $P(x)=x^3-\frac{1}{8}$ پولینوم یو فکتور دی.

5 – د ترکیبي وېش په مرسته د $x=-\frac{1}{2}$ لپاره د $P(x)=5x^2+x-9$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

6 – د ترکیبي وېش په مرسته د $x=3$ لپاره د $k(x)=2x^3-3x^2+4x+1$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

7 – د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې د 3 عدد د $x^3-3x^2+x-3=0$ پولینومي معادلې یو حل (جذر) دی.

8 – د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې د -1 او 2 عددونه د $x^4-5x^2+4=0$ معادلې حلونه (جذرونه) دي.

9 – د ترکیبي وېش په مرسته د k قیمت پیدا کړئ چې که $(x+3)$ د $P(x)=3x^3+kx^2-22x+24$ پولینوم یو فکتور وي.

10 – د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او باقي پیدا کړئ.

$(4x^4 - 5x^2 + 2x - 3) \div (x - 2)$ $(x^3 - x^2 - 14x + 11) \div (x - 4)$

$(7x^4 + 41x^2 - 6) \div (x + 6)$ $(5x^3 - 3x + 7) \div (x + 4)$

11- د b او c قیمتونه په داسې حال کې پیدا کړئ چې که د $P(x) = x^4 + 6x^3 - 20x^2 + bx + c$ پولینوم پر $x^2 - 3x + 2$ وویشو، باقي صفر شي.

12 - د m قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ چې که د $k(x) = 2x^3 + 5x^2 - mx + 4$ پولینوم پر $(x^2 + 2x - 1)$ وویشو او باقي صفر شي.

13 - که $k = 3a(x-1)^2 - a(x-1) - 4$ او $L = 16 + b(x-1) - 3b(x-1)^2$ وي

$Kb + La$ پیدا کړئ.

14 - د x په کوم قیمت د $P(x) = 12x^4 + 3x^3 - 13x^2 + x + 5$ پولینوم پر $(3x^2 - 1)$ پوره وېشل کېږي؟

15 - د P د کوم قیمت لپاره د $K(x) = 3x^3 - 7x^2 - 9x + P$ پولینوم پر $(x - 13)$ پوره د وېشلو وړ دی؟

16 - که د $P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$ پولینوم پر $(2x + 1)$ وویشل شي، د وېش د عملیې د سرته رسولو پرته ویلای شئ چې پاتې (باقي مانده) به څومره وي؟

a) -3 b) $-\frac{3}{2}$ c) 3 d) $\frac{7}{2}$

17 - د m قیمت به څو وي، که د $P(x) = 5x^2 + 6x - 7$ پولینوم پر $(x + m)$ وویشل شي تر څو باقي مانده (1) شي؟

a) 2 b) $\frac{-4}{5}$ c) -4 d) a او b سم دي

18 - که د $P(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 8$ پولینوم، پر $(x + 3)$ وویشل شي د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته ووایاست چې باقي څومره ده؟

a) صفر b) 13 c) -23 d) 7

19 - که چېرې $x = 4$, $y = -3$ او $z = 2$ وي، د لاندې الجبري افادو قیمت پیدا کړئ.

$a: x^2yz + zxy^2 + 3xyz^2$ $\qquad$ $b: \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{4}Z^2$

20 – د x د راکړل شوو قیمتونو لپاره د ترکیبي وېش په مرسته د لاندې پولینومو قیمتونه پیدا کړئ.

$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5 \quad , \quad x = 2$

$P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \quad , \quad x = -1$

$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x - 1 \quad , \quad x = 1$

$P(x) = 4x^4 + 6x^3 + x^2 + x - 3 \quad , \quad x = -2$

21 – د لاندې معادلو یو، یو جذر راکړل شوی دی، د ترکیبي وېش په مرسته یې نور جذرونه پیدا کړئ.

$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$ یو جذر یې (3) دی.

$x^3 - 5x^2 + 7x + 13 = 0$ یو جذر یې (-1) دی.

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ یو جذر یې (-1) دی.

$x^4 - x^3 - 9x^2 - 11x - 4 = 0$ یو جذر یې (-1) دی.

22 – که $P(x) = 0$ وي، د دې پولینوم درجه څو ده؟

a) 1 $\qquad$ b) -1 $\qquad$ c) صفر $\qquad$ d) تعریف شوې نه دی

23 – د هغه مستطیل له مساحت څخه چې بعدونه یې $(x+5)$ او $(x+2)$ وي، د هغه مستطیل مساحت تفریق کړئ چې بعدونه یې $(x+3)$ او $(x+1)$ وي.

24 – که $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ او $a = 13$, $b = 5$, $c = 12$ او $p = \frac{a+b+c}{2}$ وي، د A قیمت پیدا کړئ.

25 – که $(x-1)^3$ او $x^3 + ax^2 + bx + c$ معادل پولینومونه وي، د b قیمت مساوي دی په:

a) 1 $\qquad$ b) 3 $\qquad$ c) −3 $\qquad$ d) −1

26 – د $(a - \frac{2}{a-1})\,(a \div \frac{a+1}{a-1})$ افادې حاصل مساوي دی په:

a) $a(a+1)$ b) $a(a-2)$ c) $\frac{a-2}{a}$ d) $\frac{a-1}{a}$

27 – د $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y)$ د ضرب حاصل مساوي دی په:

a) x^2-y^2 b) x^2+y^2 c) $2x^2-y$ d) $x-y$

28 –لاندې پولینومونه په نزولي ډول (Descending Order) ترتیب او هم وواياست چې درجې يې څو دي؟

a) $-5x^2+3x^5+9$ b) $-x^2+xy^2z^3-x^5$ c) 3

29 – د $Q(x)=x^2+3x-5$ په پولینوم کې $Q(-1)$ مساوي دی، په:

a) 7 b) -7 c) 1 d) -1

30 – كه $P(x)=x^2-2x+3$ او $Q(x)=2x^2+3x-1$ وي، د لاندې افادو قيمتونه پيدا کړئ.

$P(x)-Q(x)$ $P(0)+Q(0)$ $P(1)-Q(-1)$

$P(x)-P(x)$ $[P(x)+Q(x)]+p(x)$

31 - لاندې پولینومونه نظر y ته په نزولي ډول ترتیب کړئ.

$4x^2y-3xy^2+x^3+y^3$ $4xy^3-3x^3y+2x^2y^2+x^4+y^4$

32 – په لاندې الجبري افادو کې پولینومونه، ناطقې الجبري افادې او غیر ناطقې الجبري افادې په نښه کړئ.

13 , $\sqrt{2}x$, 0

$\frac{3x^2}{2}$, $\sqrt{x}-\frac{1}{x}$, $y^2-\frac{1}{y^2}$

33 – د $(1+2x+3x^2)+(3x-5-2x^2)+(-x^2-5x+4)$ افادې حاصل مساوي دی په:

a) 1 b) صفر c) -1 d) 2

34 – د دوو الجبري افادو د ضرب حاصل $(a^3+b^3+c^3-3abc)$ دی. که یوه افاده یې $(a+b+c)$ وي، بله افاده پيدا کړئ.

35 - د وېش حاصل یې پیدا کړئ.

$(12x^4+3x^3-13x^2+x+5)\div(3x^2-1)$ $\quad$ $(a^3+b^3)\div(a+b)$

$(4x^3-10x^2+12x+6)\div(2x+1)$ $\quad$ $(a^5-b^5)\div(a-b)$

$\frac{x^{a-2}}{x}$ $\quad$ $\frac{-m^a}{m^b}$

36 - ضرب یې کړئ.

$(a^{2x}-2)(a^{2x}-2)$ $\quad$ $(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})$

$(e^x+1)(e^x-1)$ $\quad$ $(m^2-2n^2)(2m^2-n^2)$

$(0.1x^2)(0.1x^2)(0.1x^2)$ $\quad$ $(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)$

37 - لومړی لاندې افادې ساده او بیا یې جمع کړئ.

$(a-1)+1-(a-1)-3$ $\quad$ $-(10mn-m)-(m^2+m)+m^2$

$(y^2-1)+(y^2-1)$ $\quad$ $[-4(a-b)-5]+[(2a+b)-(a-b)]$

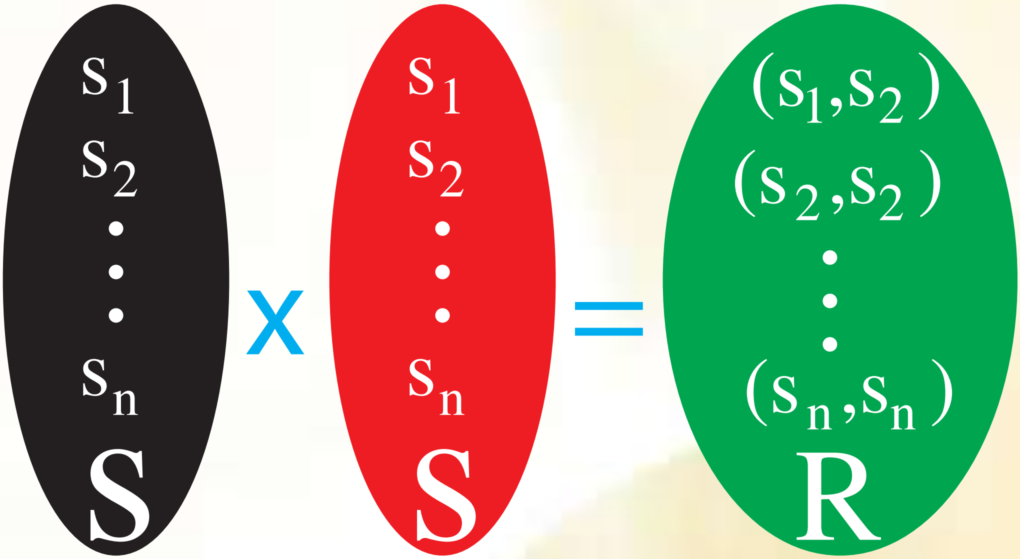
$10[-\{-(x^2-1)+5\}-x(x-2)]$ $\quad$ $10(x+1)-(x+1)-3(x+2)$

$mn-4+mn-5$

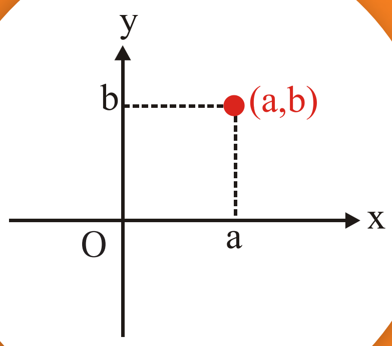
38 - د کومې لاندینې راکړل شوې یو حده درجه صفر ده؟

a) x $\qquad$ b) $\sqrt{2}\,x$ $\qquad$ c) $\sqrt{2}$

دویم څپرکی
رابطه


s1
s2
sn
S
x
s1
s2
sn
S
=
(s1,s2)
(s2,s2)
(sn,sn)
R

مرتبي جوړې او کارتيزيني مستوي



- د (a,b) مرتبه جوړه په کوم حالت کې د (c,d) له مرتبې جوړې سره مساوي کېدای شي؟
- آيا د (a,b) مرتبه جوړه د (b,a) له مرتبې جوړې سره مساوي ده؟

که a او b د يوه سټ او يا د مختلفو سټونو عناصر وي او a ته لومړنى عنصر او b ته دويم عنصر ووايو، نو (a,b)ته مرتبه جوړه وايي او (b,a) هم يو مرتبه جوړه ده، خو $(a,b) \neq (b,a)$ د (a,b) مرتبه جوړه په هغه صورت کې د (c,d) له مرتبې جوړې سره مساوی کېدای شي چې a=c او b=d وي.

لومړی مثال: که $(x-2, y+1) = (1,3)$ وي د x او y قيمتونه پيدا کړئ.

حل

$$x-2=1 \qquad y+1=3$$

$$\boxed{x=3} \qquad \boxed{y=2}$$

فعاليت

که $(a+1, 2b-3) = (0,-1)$ وي، د a او b قيمتونه پيدا کړئ.

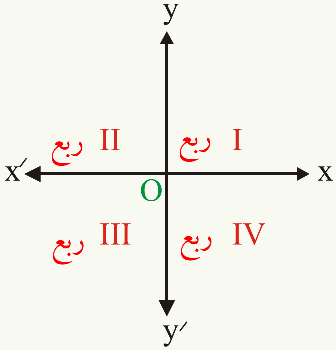
کارتيزيني مستوي (Cartesian Plane)

دوه، عمود او افقي خطونه رسم کړئ او د تـقاطع ټکي ته يې مبدأ (Origin) وايي، افقي خط ته د X محور او عمود خط ته د Y محور وايي.

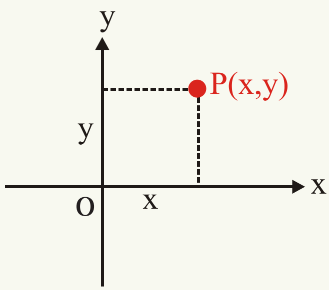
د X محوريه X'OX او د Y محور په Y'OY سره وښيئ، هغه مستوي چې دا محورونه په کې واقع دي د کارتيزيني مستوي په نامه يادېږي.

دواړه محورونه مستوي په څلورو برخو وېشي چې هرې برخې ته يې ربع (ناحيه)(Quadrant)

وايي، د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف جهت (Anti clockwise) په ترتيب سره لومړنی دويمه، دريمه او څلورمه ربع ده، لکه: څنګه چې په شکل کې ليدل کېږي.

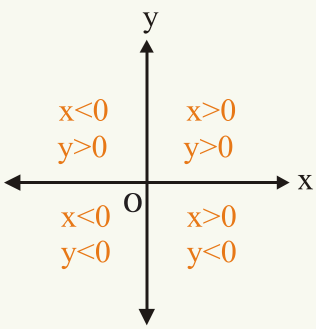


په دې مستوي کې د P دنقطې موقعيت د (x,y) د حقيقي عددونو د مرتبې جوړې په واسط داسې ښودل کېږي چې دP د نقطې افقي فاصله د Y له محور څخه x او د P د نقطې عمودي فاصله د x له محور څخه y ده.



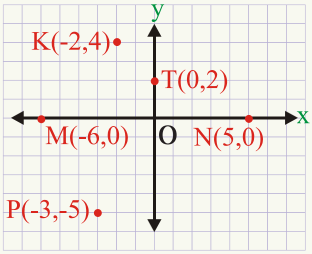
که د P نقطه د Y د محوربني خواته واقع وي، د x قيمت مثبت دی او که د Y د محور کينې خواته واقع وي، د x قيمت منفي دی او که د P نقطه د Y پر محور پرته وي $x = 0$ دی.

همدارنګه که د P نقطه د X له محور څخه پورته واقع وي، د y قيمت مثبت او که د X له محور څخه لاندې واقع وي د y قيمت منفي دی. $(y < 0)$ او که د p نقطه د X پر محور پرته وي، $y = 0$ کېږي، په لنډ ډول په شکل کې ښودل شوي دي

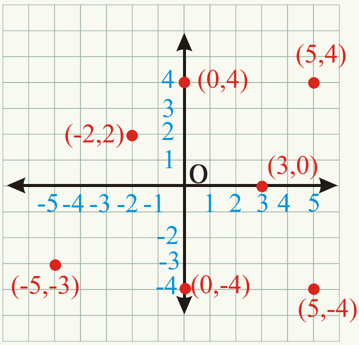


چي x او y ته کارتيزيني مختصات (Cartesion Coordinates) وايي چې په $P(x,y)$ کې لومړنی عنصر x ته فاصله (abscissa) او دويم عنصر y ته ترتيب (Ordinate) وايي چې د مختصاتو مبدا $(0,0)$ ده، څرګنده ده چې د حقيقي عددونو (x,y) د هرې مرتبې جوړې لپاره په مستوي کې يوه نقطه او د مستوي د هرې نقطې لپاره د حقيقي عددونو يوه جوړه شته دی.

دويم مثال: د $P(-3,-5)$، $K(-2,4)$، $T(0,2)$، $N(5,0)$ او $M(-6,0)$ نقطې د وضعيه کمياتو په مستوي کې وښاياست.



دريم مثال: د هرې نقطې لپاره چې په لاندې شکل کې ښودل شوي دي، اړونده مرتبه جوړه وليکئ.



فعاليت

د $(2,-1)$، $(-1,2)$، $(-2,-1)$، $(2,1)$، $(2,0)$ او $(0,1)$ نقطې دوضعيه کمياتو په سيستم کې وښاياست.

پوښتني

1 - که د P د نقطي فاصله مثبت او ترتيب يې منفي وي، د P نقطه په کومه ربع کې واقع ده؟

2 - که د يوه شکل څلور رأسونه $A(3,3)$, $B(-3,3)$, $C(-3,-3)$ او $D(3,-3)$ وي، داکوم ډول هندسي شکل دی؟

3 - د وضعيه کمياتو په مستوي کې هغه مثلث چې رأسونه يې $A(2,0)$, $B(0,2)$ او $C(0,0)$ وي رسم کړئ او ووایاست چې د اکوم ډول مثلث دی؟

4 - د $P_1(2,-3)$, $P_2(-3,2)$, $P_3(1,5)$ نقطې د وضعيه کمياتو په سيستم کې وټاکئ.

5 - ووایاست چې لاندې مرتبې جوړې په کومه ربع کې واقع دي؟

$(1,5)$, $(-5,1)$

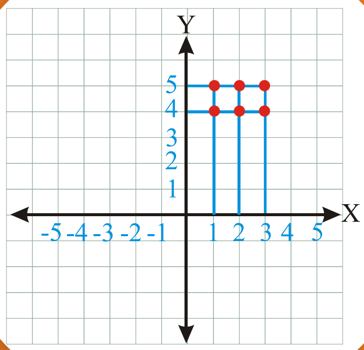
$(-4,-6)$, $(4,-5)$

$(-\frac{1}{2},-2)$, $(-\frac{1}{2},2)$

$(2\frac{1}{2},\frac{1}{4})$, $(2,0)$

$(0,-1)$

د کارتیزني ضرب حاصل او ګراف یې



آیا په مخامخ شکل کې $A \times B$ ښودلای شئ؟

فعالیت

که $A\{1,2,3\}$ او $B=\{4,5\}$ وي:

- $A \times B$ پیدا کړئ.
- د $A \times B$ د عناصرو شمېر پیدا کړئ.
- آیا $A \times B = B \times A$ دي؟
- آیا $A \times A$ او $B \times B$ پیدا کولای شئ؟

که A او B دوه غیر خالي ستونه وي، $(A \times B)$ په لاندې ډول تعریف شوي دي:

$$A \times B = \{(x,y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

په دې معنا چې د A او B د ضرب حاصل $(A \times B)$ داسې یوسټ دی چې عناصر یې د (x,y) د هغه مرتبو جوړوسټ دی چې x د A د سټ او y د B د سټ عنصروي، که $A \neq B$ وي نو: $A \times B \neq B \times A$ دي که د A د سټ د عنصرونو شمېر m او د B دسټ د عنصرونو شمېر n وي، د $A \times B$ د عناصرو شمېر له $(m \times n)$ څخه عبارت دی.

لومړی مثال: که $A = \{0,1,2\}$ او $B = \{3,4\}$ وي $A \times B$, $B \times A$ او $A \times A$ پیدا کړئ.

حل

$$A \times B = \{0,1,2\} \times \{3,4\} = \{(0,3),(0,4),(1,3)(1,4),(2,3),(2,4)\}$$
$$B \times A = \{3,4\} \times \{0,1,2\} = \{(3,0),(3,1),(3,2)(4,0),(4,1),(4,2)\}$$
$$A \times A = \{0,1,2\} \times \{0,1,2\} = \{(0,0),(0,1),(0,2)(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$$

فعالیت

که $A=\{-4,-1,0\}$ او $B=\{1,4\}$ وي $A\times A$, $A\times B$ او $B\times B$ پیداکړئ.

دویم مثال: که $IN=\{1,2,3...\}$ او $L=\{0\}$ وي، نو $IN\times L$ پیداکړئ.

حل:

$$IN\times L=\{(1,0),(2,0),(3,0),(4,0)...\}=\{(x,0)/x\in IN\}$$

دریم مثال: که $IN=\{1,2,3...\}$ او $W=\{0,1,2,3...\}$ وي $W\times N$ پیداکړئ.

حل

$$W\times IN=\{(0,1),(0,2),(0,3),...,(1,1),(1,2),(1,3),...,(2,1),(2,2),...,\}$$
$$=\{(x,y)/x\in w\wedge y\in IN\}$$

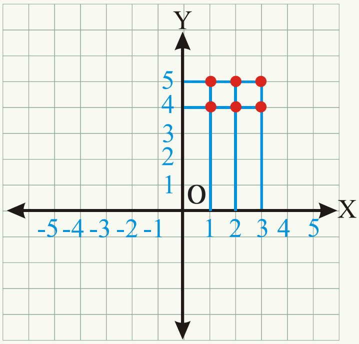
د کارتیزني حاصل ضرب ګراف: (Graph of Cartesian Product)

کولای شو چې د کارتیزني ضرب حاصل د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هم وښودلای شو.

څلورم مثال: که $A=\{1,2,3\}$ او $B=\{4,5\}$ وي $A\times B$ پیداکړئ او د وضعیه کمیاتو په مستوي کې یې وښیاست.

حل

$$A\times B=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$$

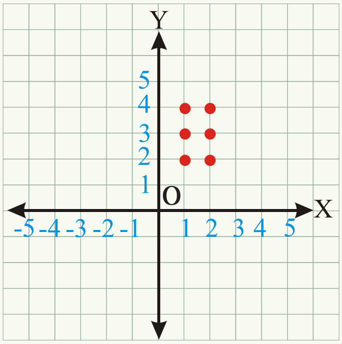


د X پرمحور د 1,2,3 عددونه او د Y پر محور د 4 او 5 عددونه ټاکو له 2,1 او3 څخه عمود خطونه او له 4 او 5 څخه افقي خطونه رسموو، ددې دواړو خطونو د تقاطع نقطې د $A\times B$ مرتبې جوړې ښکاره کوي.

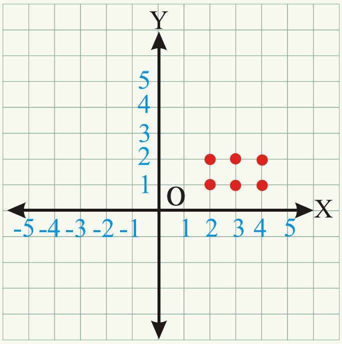
پنځم مثال: که $A=\{1,2\}$ او $B=\{2,3,4\}$ وي $A\times B$ او $B\times A$ پيداکړئ او په شکل کې
پې وښياست.

$$A\times B=\{1,2\}\times\{2,3,4\}=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}$$

$$B\times A=\{2,3,4\}\times\{1,2\}=\{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$$



$A\times B$

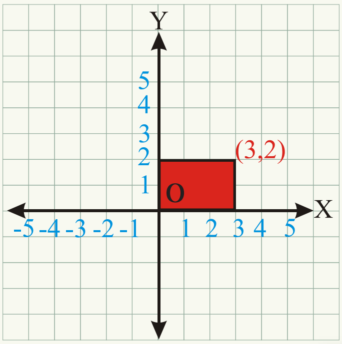


$B\times A$

شپږم مثال: که $A=\{x/x\in IR, 0\leq x\leq 3=[0,3]\}$ او
$B=\{y/y\in IR, 0\leq y\leq 2=[0,2]\}$ وي $A\times B$ په شکل کې يې وښياست.

حل

$$A\times B=\{(x,y)/0\leq x\leq 3\wedge 0\leq y\leq 2\}$$



فعاليت

که چېرې $A=\{1,2\}$ او $B=\{3,4\}$ وي $A\times B$ پيدا او په شکل کې يې وښياست.

پوښتنې

1 - که:

$A = \{-1,1,3\}$ i) $B = \{2,4\}$

$A = \{-1,1\}$ ii) $B = \{2,3\}$

وي $A \times B$ پیدا او په شکل کې یې وښیاست.

2 - د لومړۍ پوښتنې د ستونو لپاره $B \times A$ پیدا او په شکل کې یې وښیاست.

3 - که $A = \{1,2,3\}$ وی $A \times A$ پیدا کړئ.

4 - که $A = \{2,4,6\}$ او $B = \{1,3,5\}$ وی $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$ او $B \times B$ پیدا کړئ



رابطه
(Relation)

عطاالله د عزت الله ورور دی

(عطا الله R عزت الله)

ورورولي هم یوه رابطه ده.

یوسټ چې د شیانو او مفهومونو له مرتبو جوړو څخه جوړ شوی وي، له یوې رابطې څخه عبارت دی. یاکه A او B دوه غیر خالي سټونه (non empty sets) وي، نو د $A\times B$ هرفرعي سټ له A څخه په B کې یوه رابطه ده، که $(a,b)\in R$ وي، ویل کېږي چې a له b سره رابطه لري او د (aRb) په شکل لیکل کېږي.

که R له A څخه په B کې یوه رابطه وي، نو $R\subset A\times B$ ده او که R د $A\times A$ یو فرعي سټ وي، نو R په A کې یوه رابطه ده.

لومړی مثال: که $A=\{x,y\}$ او $B=(1,2)$ وي، $A\times B$ پیداکړئ، او له A څخه په B کې څلور رابطې ولیکئ.

حل

$$A\times B=\{(x,1),(x,2),(y,1),(y,2)\}$$
$$R_1=\{(x,1),(x,2)\}$$
$$R_2=\{(y,1)\}$$
$$R_3=\{(y,2)\}$$
$$R_4=\{(x,1),(y,1)\}$$

چې د $A\times B$ د عناصرو شمېر څلور او د $A\times B$ د ټولو فرعي سټونو شمېر $2^4=16$ دی، نو له A څخه په B کې د ټولو رابطو شمېر 16 دی.

دویم مثال: که $A=\{1,3,5,\ldots 19\}$ چې د A د سټ د عناصرو شمېر 10 دی او $B=\{2,4,6\}$ وي چې د B د عناصرو شمېر (3) دی، د $A\times B$ د عناصرو شمېر(ټولې مرتبې جوړې)

$30 = 3 \times 10$ دي او له A څخه په B کې د ټولو رابطو شمېر 2^{30} دی.

پام موږ چې: ϕ او $A \times B$ هم په فرعي سټونو کې شامل دي.

دريم مثال: که $A = \{1,2,3\}$ او $B = \{a,b\}$ وي له A څخه په B کې (3) رابطې وليکئ.

حل:

$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$

درې رابطې عبارت دي له:

$$R_1 = \{(1,a),(1,b),(2,a),(3,a),(3,b)\}$$
$$R_2 = \{(1,b),(2,a),(3,a),(3,b)\}$$
$$R_3 = \{(2,a),(2,b),(3,a)\}$$

فعالیت

که $R = \{(x,y) / x + y = 5)\}$ په $A = \{1,2,3,4\}$ کې يوه رابطه وي، د R عناصر وليکئ.

څلورم مثال: که $R = \{(x,y) / x - y = 2\}$ په $A = \{1,2,3,4\}$ کې يوه رابطه وي، د R عناصر وليکئ.

حل: $R = \{(3,1),(4,2)\}$ ده.

د رابطې د تعريف ساحه (Domain) او د قيمتونو ساحه (Range) يې

پوهېږو چې که R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، نو $R \subseteq A \times B$ ده، په دې معنا چې R يو سټ دی چې عناصر يې د (x,y) مرتبې جوړې دي چې $x \in A$ او $y \in B$ ده.

د R د تعريف ساحه د مرتبو جوړو لومړني عناصر دي چې په Dom_R سره ښودل کېږي. همدارنګه د R د قيمتونو ساحه (Range) د مرتبو جوړو دويمي عناصر دي، په $Range_R$ سره ښودل کېږي.

لومړی مثال: که $A = \{1,2\}$ او $B = \{x, y\}$ وي او R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، لومړی د دې رابطې عناصر وليکئ، بيا د رابطې د تعريف ساحه (Dom_R) او د قيمتونو ساحه ($Range_R$) يې وليکئ.

حل

$R=\{(1,x),(2,x),(1,y),(2,y)\}$

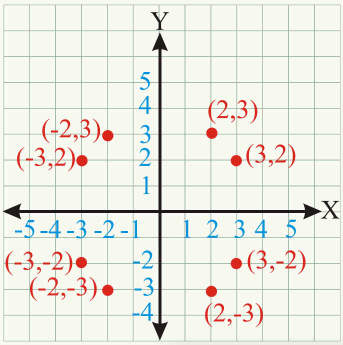
$Dom_R=\{1,2\}\qquad Range_R=\{x,y\}$

دویم مثال: که د $R=\{(x,y)/x^2+y^2=13\}$ رابطه د $A=\{-3,-2,1,2,3\}$ په سټ کې تعریف شوي وي، لومړی د (R) عناصر د مرتبو جوړو په شکل ولیکئ، (Dom$_R$) او (Range$_R$) پیدا کړئ او بیا یې ګراف رسم کړئ.

$R=\{(-3,-2),(-3,2),(-2,-3),(-2,3),(2,-3),(2,3),(3,-2),(3,2)\}$

$Dom_R=\{-3,-2,2,3\}$

$Range_R=\{-3,-2,2,3\}$



فعالیت

که $R=\{(x,y)/y=2x\}$ وي او د R د تعریف ناحیه $\{0,4,8\}$ وي، د R د قیمتونو ناحیه معلومه کړئ.

معکوسه رابطه (Inverse of a Relation)

که R له A څخه په B کې یوه رابطه وي، د R معکوس چې په R^{-1} سره ښودل کیږي او له $R^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in R\}$ څخه عبارت ده:

$(x,y)\in R\Leftrightarrow(y,x)\in R^{-1}$

د R دتعریف ساحه د R^{-1} د قیمتونو ساحه او د R^{-1} د تعریف ساحه د R د قیمتونو له ساحې څخه عبارت ده.

مثال: که $R=\{(1,2)(2,3)(3,4)\}$ د طبیعي عددونو په سټ کې یوه رابطه وي، د R د رابطې معکوسه رابطه یا R^{-1} پیدا کړئ.

حل:

$R^{-1}=\{(2,1)(3,2)(4,3)\}$

معادله رابطه (Equivalent Relation): د R رابطه د A په سټ کې یوه معادله رابطه ده، که درې لاندني خاصیتونه ولري:

1- انعکاسي خاصیت (Reflexive Property): د x د هر عنصر $x \in A$ لپاره $(x,x) \in R$ وي یا $\forall x \in A \Rightarrow (x,x) \in R$

2- تناظري خاصیت (Symmetric Property): ( ) که(x,y) په R کې شامله وي، نو (y,x) هم په R کې شامله وي یا: $\forall (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

3 - انتقالي خاصیت (Transitive Property):که $(x,y) \in R$ او هم $(y,z) \in R$ وي په نتیجه کې (x,z) مرتبه جوړه هم په R کې شامله وي یا:

$(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

مثال: د مساوات رابطه د حقیقي عددونو په سټ کې یوه معادله رابطه ده:

1- په حقیقي عددونو کې د هر x لپاره x=x دی، 5=5 (انعکاسي خاصیت)

2- د هر $x, y \in IR$ لپاره که x=y وي، نو y=x ده(تناظري خاصیت)

3- د هر $x, y, z \in IR$ لپاره که $x = y$ او y=z وي په نتیجه کې x=z دی(انتقالي خاصیت)

پوښتنې

1- که $A = \{1,2\}$ □ $B = \{0,4,6\}$ وي.

له A څخه پهB کې درې رابطې ولیکئ.

له B څخه په A کې خلور رابطې ولیکئ.

په A کې خلور رابطې ولیکئ.

2- که $A = \{1,2,3,4\}$ او $B = \{1,3,5\}$ وي او $R = \{(x,y) | y < x\}$ ، له A څخه په B کې یوه رابطه وي، د R عناصر ولیکئ.

3- که $R = \{(x,y) | y+1 = 2x^2\}$ د طبیعي عددونو په سټ کې یوه رابطه وي او د تعریف ساحه یې ټول طبیعي عددونو وي، د قیمتونو ساحه (Range) یې پیدا کړئ.

- (a,b): چې دلیکلو ترتیب په کې اهمیت لري، مرتبه جوړه نومېږي چې a ته لومړنی مختصه او b ته دویمه مختصه وایي، په عمومي ډول $(a,b)\neq(b,a)$
- د (a,b) او (c,d) دوه مرتبې جوړې په داسې حال کې سره مساوي دي چې $a=c$ او $b=d$ وي.
- **د کارتیزیني ضرب حاصل**: د A او B دسټونو کارتیزیني ضرب چې په $A\times B$ سره ښودل کېږي په دې ډول تعریف شوی دی: $A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A\wedge y\in B\}$
- که د A سټ د عناصرو شمېر په m او د B د سټ د عناصرو شمېر په n سره وښایو، د $A\times B$ د عناصر شمېر $m\times n$ دی.
- کولای شوچې د A اوB، دسټونو ضرب $(A\times B)$ د وضعیه کمیاتو په مستوي کې وښایو.
- **رابطه**: د $A\times B$ هر فرعي سټ له A څخه په B کې د R یوه رابطه ده.

او که $R\subset A\times B$ وي، نو په دې صورت کې $R\subset A\times A$ په A کې یوه رابطه ده.

$(x\ ,\ y)\in R\Leftrightarrow x\,R\,y$

- که د A سټ د عناصرو شمېر په n سره وښایو، د A د فرعي سټونو شمېر 2^n دی.
- که د A سټ د عناصرو شمېر په m او د B دسټ د عناصرو شمېر په n سره وښایو له A څخه په B کې د رابطو شمېر 2^{mxn} دی
- که R له A څخه په B کې یوه رابطه وي، د R د تعریف ساحه (Dom_R) د مرتبو جوړو دلومړنیو عناصرو سټ او د قیمتونو ساحه $(Range_R)$ یې دمرتبو جوړو د دویمو عناصرو سټ دی.
- **معکوسه رابطه**: که R له A څخه پهB کې یوه رابطه وي، د R معکوسه رابطه په R^{-1} سره ښودل کېږي چې:

$$R.^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in R\}$$

$$(x,y)\in R\Leftrightarrow(y,x)\in R^{-1}$$

ښکاره خبره ده چې R^{-1} د تعریف ساحه د R دقیمتونو له ساحې سره او د R^{-1} دقیمتونو ساحه د R د تعریف له ساحې سره مساوي ده.

- **معادله رابطه**: R د A په سټ کې یوه معادله رابطه ده که چېرې لاندې درې خاصیتونه ولري.

1- انعکاسي خاصیت. 2- تناظري خاصیت. 3- انتقالي خاصیت.

دخپرکي پوښتني

1- که $A=\{1,3,5\}$ او $B=\{2,4,6\}$ وي $B\times A, A\times B$ او $A\times A$ پیدا کړئ.

2- که $A=\{1,2,3\}$ او $B=\{0,1\}$ وي $A\times B$ په شکل کې وښیاست.

3- که $(x-2y,2x+y)=(3,1)$ وي د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

4- په $A=\{1,3,5\}$ کې د R رابطه داسې په لاس راوړئ چې R د مساوات رابطه وي.

5- که $A=\{a,b\}$ وي د A^2 عناصر ولیکئ.

6- که د $R=\{(x,y)|y=x^2\}$ رابطه د حقیقي عددونو په سټ کې تعریف شوي وي د R رابطې گراف رسم کړئ.

7- که $R=\{(x,y)|y^2=x\}$ رابطه د حقیقي عددونو په سټ کې تعریف شوي وي د R د رابطې گراف رسم کړئ.

8- که $R=\{(1,-1),(2,-2)(3,-3)\}$ وي د R^{-1} د تعریف او قیمتونو ساحې وټاکئ.

9- که $R=\{(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)\}$ وي دR او R^{-1} د تعریف او قیمتونو ساحې وټاکئ.

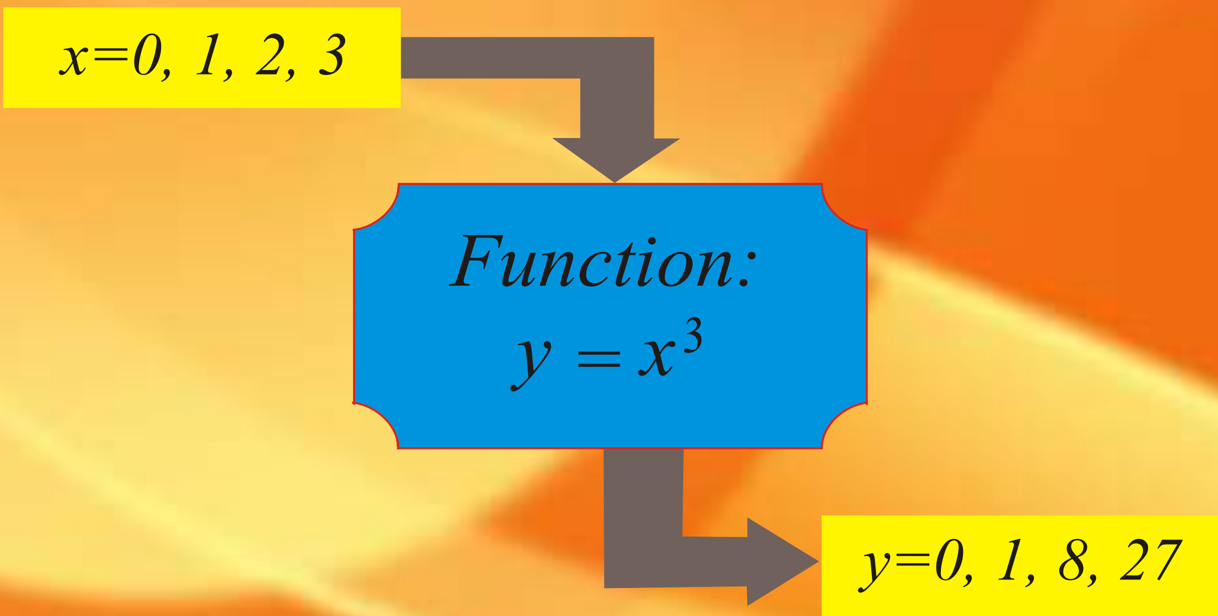
10- که $A=\{3,6,12\}$ او $B=\{-1,0\}$ وي په A کې د رابطو شمېر او له A څخه په B کې درابطو شمېر پیدا کړئ.

11- که د $(4a+1,2b+a)$ او $(5,3a-4b)$ دوه مرتبې جوړې سره مساوي وي د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

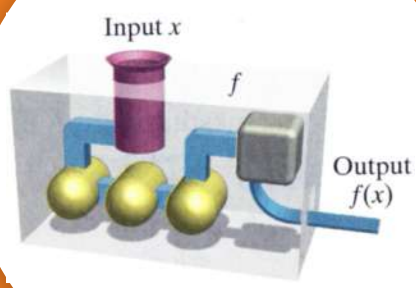
12- که $A=\{a,b,c\}$ او $B=\{x,y\}$ وي $A\times B$ او $B\times A$ پیدا کړئ.

درېم څپرکی

تابع


x=0, 1, 2, 3
Function:
$y = x^3$
y=0, 1, 8, 27

تابع (function)



آيا تابع او رابطه يو له بله سره توپير لري؟

فعاليت

- آيا هره تابع يوه رابطه ده او هره رابطه يوه تابع ده ؟
- آيا د مرتبو جوړو هر سټ يوه تابع ده؟
- آيا کولای شئ چې يوې تابع ته د يو ماشين په شان فکر وکړئ؟

د لومړي ځل لپاره د تابع مفهوم د يوه الماني رياضي پوه ليبنز (Leibniz)، (1716 – 1646) له خوا معرفي شوه.

تابع يوه رابطه يا يوه قاعده ده چې يو کميت ته د بل کميت سره اړيکه ورکوي، د تابع د مفهوم د ښه پوهيدو لپاره لاندې مثالونه تر غور لاندې ونيسئ.

1 - د يوې مربع مساحت (A) د مربع په ضلعې (x) پورې اړه لري. هغه معادله چې د مربع مساحت ته د مربع په ضلعې پورې اړيکه ورکوي له $A = x^2$ څخه عبارت ده.

د مربع ضلع x	1	2	3	4	5	...
د مربع مساحت A	1	4	9	16	25	...

يا په بل عبارت د مربع مساحت د مربع د ضلعې تابع دی يا $A = f(x)$

2 - د نړۍ د نفوسو شمېر (p) په وخت (t) پورې اړه لري، لکه: څرنګه چې په لاندې جدول کې ليدل کيږي په تقريبي ډول د نړۍ د نفوسو شمېر د ميليون په حساب ښودل شوی دی.

کال (t)	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
نفوس په ميليون (p)	1650	1750	1860	2070	2300	2560	3040	3710	4450	5280	6080

ليدل کېږي چې نفوس (Population) يا P د وخت (t) تابع ده يا $p = f(t)$

3 - د دايرې مساحت (A) ، د دايرې په شعاع (r) پورې اړه لري ($A = \pi r^2$)

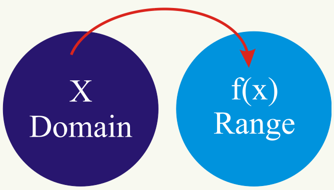
4 - د کرې حجم (V) د کرې په شعاع (r) پورې اړه لري چې د $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ د معادلې په واسطه ښودل کېږي.

له پورتنيو مثالونو څخه دا نتيجه اخيستل کېږي چې د تابع په مفهوم کې اړيکه مرکزي حيثيت لري د مثال په ډول د هر انسان عمر له يوه عدد سره اړيکه لري، په يوه مغازه کې هر جنس له يوه ټاکلې قيمت سره اړيکه لري، هر موټر د يوې ټاکلې شمېرې جوازسېر پورې اړه لري او د هر عدد مکعب، يو عدد دی .($2^3 = 8$, $3^3 = 27$)

په پورتنيو مثالونو کې ليدل کېږي چې مساحت (A)، نفوس (P) اوحجم (V) د مربع ضلعې (x)، وخت (t) او د کرې شعاع (r) تابع دي چې مساحت، نفوس او حجم هر يوه ته مربوط (مقيد) متحول (dependent Variable) او د مربع ضلعې، د کرې شعاع او د وخت کميتونو ته ازاد متحول يا مستقل متحول (Independent Variable) وايي کولای شو چې تابع داسې تعريف کړو:

تعريف

تابع د دوو ستونو تر منځ يوه داسې رابطه يا قاعده ده چې د لومړني سټ هر عنصر يوازې او يوازې د دويم سټ له يو عنصر سره اړيکه ولري چې لومړني سټ د تعريف د ناحيې (Domain) او دويم سټ د قيمتونو د ناحيې (Range) په نوم يادېږي.



يا تابع د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر يې تکرار شوي نه وي.

که $S = \{(1,4)(2,3)(3,2)(4,3)(5,4)\}$ وي، نو د S رابطه د يوې تابع ښودونکې ده، ځکه چې د مرتبو جوړو لومړني عناصر يې تکرار شوي نه دي.

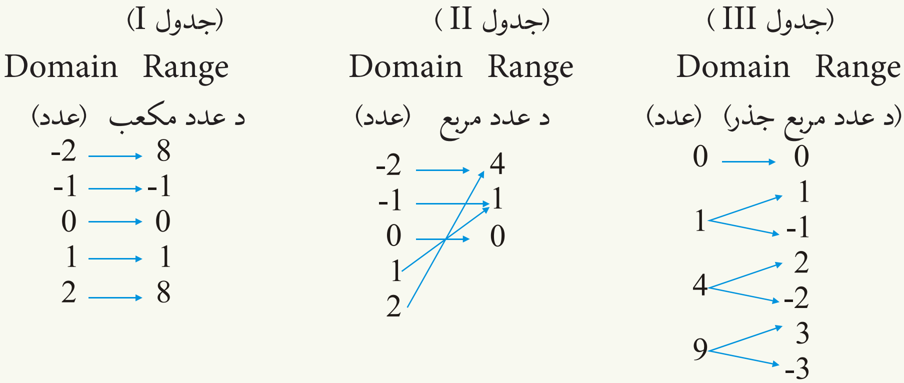
$\text{Domain}(s) = \{1,2,3,4,5\}$

$\text{Range}(s) = \{2,3,4\}$

فعالیت

که $T = \{(1,4),(2,3),(3,2),(2,4),(1,5)\}$ وي آیا T یوه تابع ښیيي؟

لومړی مثال: په لاندې جدولونو کې کوم یو، یوه تابع ښکاره کوي؟



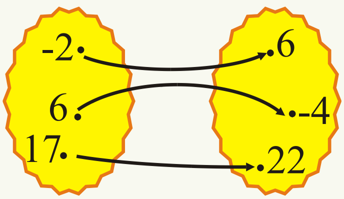
I او II جدولونه تابع ښکاره کوي، لیکن III جدول تابع نه ښکاره کوي، ځکه چې د لومړنۍ سټ یا (Domain) یو عنصر د دویم سټ (Range) له دوو عنصرو سره اړیکه لري، یا په بل عبارت د مرتبو جوړو لومړني عناصر تکرار شوي دي چې مرتبې جوړې یې : $(1\ ,\ 1),(1\ ,\ -1),(4\ ,\ 2),(4\ ,\ -2),(0,0),(9\ ,3),(9\ ,\ -3)$ دي او یا دا چې د لومړنۍ سټ د یو عنصر لپاره په دویم سټ کې دوه تصویرونه (Images) موجود دي، ډېره ښه به دا وي چې یوې تابع ته د یو ماشین فکر وکړو، کوم شکل چې د څېرکې په لومړي مخ کې راکړل شوی دی، خام مواد یا ورودي (input) یا Domain او خروجي output یا $f(x)$ د Range په نامه یادېږي.

که A او B د حقیقي عددونو سټونه وي له A څخه B ته هره تابع د حقیقي تابع په نامه یادېږي. پام مو وي چې : $Range \subseteq codomain$ دی.

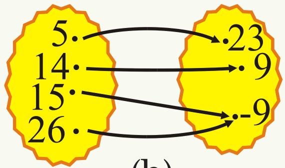
دویم مثال: که $f = \{(-5,3m)\ ,\ (-5,2m-10)\ ,\ (1,2)\}$ د یوې تابع ښودونکې وي، د m قیمت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $-5 = -5$ دي، نو باید $3m = 2m - 10$ سره وي، په نتیجه کې $m = -10$ کېږي په دې معنا دي لپاره چې f یوه تابع وي، باید $m = -10$ وي.

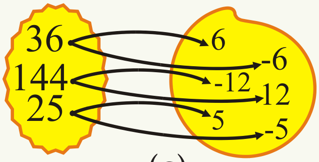
دریم مثال: له لاندېنیو دیاګرامونو څخه کوم یو یې یوه تابع ښیيي؟



(a)



(b)



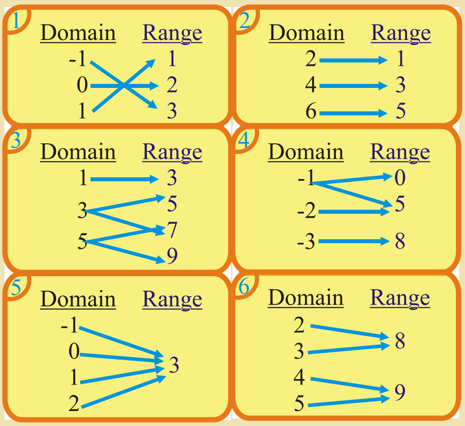
(c)

حل: د a او b دیاگرامونه تابع ښيي، ليکن د c دیاگرام د يوې تابع ښودونکی نه دی.

تابع د X او Y د دوو سټونو ترمنځ يوه داسې رابطه ده چې د x د سټ يا (Domain) هر عنصر يوازې د Y د سټ (Range) د يو عنصر سره اړيکه لري چې X ته ازاد متحول او Y ته مقيد (مربوط) متحول وايي يا تابع د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر يې تکرار شوي نه وي.

پوښتني

1 – د مخامخ جدولونو څخه کوم يو يې د تابع ښودونکی دی؟



2 – د لاندې مرتبو جوړو له سټونو څخه کومه يوه يې يوه تابع ښيي؟ د تعريف ساحه (Domain) او د قيمتونو ساحه (Range) يې تعين کړئ.

1– $\{(2,4)\,,\,(3,6)\,,\,(4,8)\,,\,(5,10)\}$

2– $\{(-1,4)\,,\,(0,3)\,,\,(1,2)\,,\,(2,1)\}$

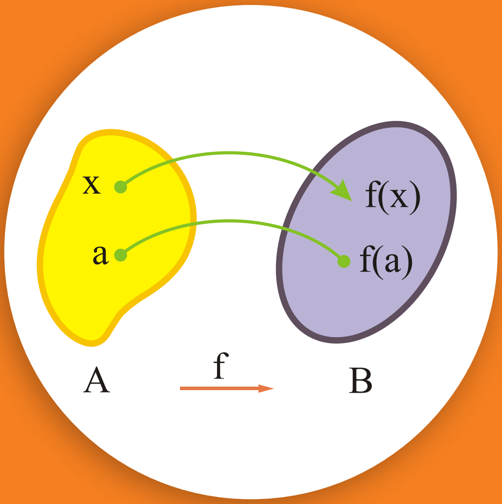
3– $\{(10,-10)\,,\,(5,-5)\,,\,(0,0)\,,\,(5,5)\,,\,(10,10)\}$

4– $\{(-10,10)\,,\,(-5,5)\,,\,(0,0)\,,\,(5,5)\,,\,(10,10)\}$

5– $\{(0,11),(1,1),(2,1),(3,2),(4,2),(5,2)\}$

6– $\{(1,1)\,,\,(2,1)\,,\,(3,1)\,,\,(1,2)\,,\,(2,2)\,,\,(3,2)\}$

د تابع د لیکلو طریقه او د یوې تابع د قیمت پیدا کول



- څه وخت یوه معادله د یوې تابع ښکارندویه ده؟
- یوه رابطه څه وخت یوه تابع ښیي؟
- یو جدول څه وخت یوه تابع ښیي؟

د لومړي ځل لپاره سویسي ریاضي پوه اویولر (1707 -1783) (Euler) دا عبارت چې y د x تابع ده، د $y = f(x)$ مساوات په شکل وښوده چې $f(x)$ د x لپاره د y یا $f(x)$ د تابع قیمت دی. که f له A څخه B ته یوه تابع وي، په لاندې ډول ښودل کېږي چې

$f: A \rightarrow B$

$y = f(x)$ یا

په شکل کې x له (input) او $f(x)$ له (output) څخه عبارت دی، تابع ګانې د f,g,h او نورو تورو په واسطه ښودل کېږي.

تابع عموماً په 4 طریقو ښودل کېږي.

1 – د عبارتونو (جملو) په واسطه (Verbally)

2 – د یوه جدول په واسطه یا عددي (Numerically)

3 - مشاهده وي: د ګراف په واسطه (Visually)

4 - د یو واضح فورمول یا معادلې په واسطه یا په الجبري ډول (Algebraically)

فعالیت

که $f(x)$ او $g(x)$ په جدولونو کې په لاندې ډول راکړل شوي وي، د x په راکړل شوو قیمتونو کې ددې تابع ګانو قیمت پیدا کړئ. یا په بل عبارت د تابع د تعریف ساحه (Domain) درکړل شوې ده، د تابع اړونده قیمتونه (Range) یې پیدا کړئ.

$g(x)=x^3-1$

x=	0	-1	1	2
g(x)=	?	?	?	?

$f(x)=\frac{1}{2}x-4$

x=	-1	-2	0	2	4
f(x)=	?	?	?	?	?

لومړی مثال: که $f(x)=x^2+3x-2$ وي $f(2)$ ، $f(0)$ ، $f(-3)$ او $f(a)$ پیدا کړئ.

حل:

د تابع قیمتونه	تابع (Rule) $f(x)=x^2+3x-2$	د تعریف ساحه
8	$f(2)=2^2+3\cdot2-2=4+6-2$	2
-2	$f(0)=0^2+3\cdot0-2=-2$	0
-2	$f(-3)=(-3)^2+3(-3)-2=9-9-2$	-3
a^2+3a-2	$f(a)=a^2+3a-2$	a

یا $f(2)=8$ ، $f(0)=-2$ ، $f(-3)=-2$ ، $f(a)=a^2+3a-2$

دویم مثال: که $f(x)=x^2+3x+5$ وي، $f(-x)$ ، $f(x+3)$ او $f(2)$ پیدا کړئ.

حل

$$f(2)=2^2+3\cdot2+5=4+6+5=15$$

$$f(x+3)=(x+3)^2+3(x+3)+5=x^2+6x+9+3x+9+5=x^2+9x+23$$

$$f(-x)=(-x)^2+3(-x)+5=x^2-3x+5$$

فعالیت

که $g(x)=x^2-2x+7$ وي $g(-x)$ ، $g(x+4)$ او $g(-5)$ پیدا کړئ.

دریم مثال: که $h(x)=3-2x$ او $f(x)=2x+6$ وي $f(-1)$، $h(6)$ او $f(-1)+f(3)$ پیدا کړئ.

حل:

$$f(-1)=2(-1)+6=-2+6=4$$
$$h(6)=3-2\cdot 6=3-12=-9$$
$$f(-1)+f(3)=4+2\cdot 3+6=4+12=16$$

څلورم مثال: که $f(x)=ax^2-bx+1$ او $f(3)=10, f(1)=0$ وي د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$$10=9a-3b+1 \quad , \quad 0=a-b+1$$

$$10=9a-3b+1$$
$$0=_3a\mp 3b\pm 3$$

$10=6a-2$	$10=18-3b+1$
$12=6a$	$3b=19-10$
$a=2$	$3b=9$
	$b=3$

پنځم مثال: له لاندېنیو معادلو څخه کومه یوه یې یوه تابع ښیي؟

$a: \quad x^2+y=4 \qquad\qquad b: x^2+y^2=4$

حل: هغه وخت یوه معادله یوه تابع ښیي چې د x د هر قیمت لپاره د y یو قیمت موجود شي.

$a: \quad x^2+y=4 \Rightarrow y=4-x^2$

د x د هر قیمت لپاره y یو قیمت لري، د مثال په ډول که $x=1$ وي، $y=4-1^2=3$، نو $y=4-x^2$ یوه تابع ده.

$b: \quad x^2+y^2=4 \Rightarrow \quad y=\pm\sqrt{4-x^2}$

د x د یوه قیمت لپاره y دوه قیمتونه لري، نو y یوه تابع نه ده.

د مثال په ډول که $x=1$ وي، $y=\pm\sqrt{3}$ یا $(1\,,\sqrt{3})(1\,,-\sqrt{3})$ چې لومړني عناصر یې تکرار شوي دي.

فعالیت

وښیاست چې د $y - x^2 = 1$ او د $x^3 - y = 2$ معادلې د تابع ښودونکې دي او د $x^2 + y^2 = 4$

معادله د یوې تابع ښودونکې نه ده.

یوه تابع د $y = f(x)$ په شکل لیکل کېږي، د تابع د قیمت د پیدا کولو لپاره د x قیمت د تابع په معادله کې وضع کوو، د تابع قیمت په لاس راځي او یوه معادله هغه وخت د یوې تابع ښکارندویه وي چې د هر x لپاره یو y وجود ولري.

پوښتنې

1- که $g(x) = x^2 + x - 2$ او $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ وي $g(2) - g(-3)$ ، $g(-2), f(-3)$

او $\frac{f(0) \cdot g(-2)}{f(-3)}$ پیدا کړئ.

2 – که $f(x) = x^2 - x$ او $g(x) = \sqrt{x+4}$ وي. $f(-2)$ ، $g(0)$ او $f(x-1)$ پیدا کړئ.

3- که $g(x) = 3\sqrt{x}$ او $h(x) = 1 + 4x$ وي $h(16)$ ، $h(-3)$ او $g(-4)$ پیدا کړئ.

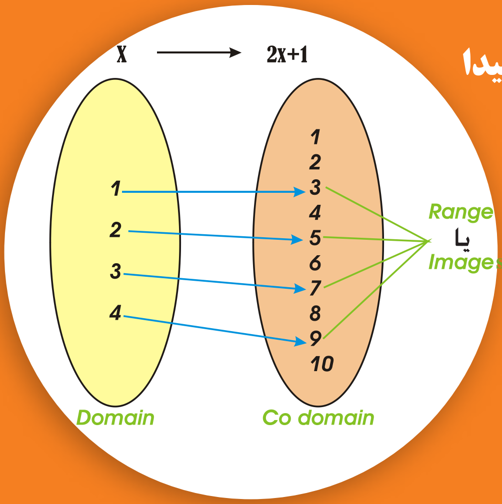
4 – $f(x) = \frac{15}{x-3}$ ، $g(x) = 16 + 3x - x^2$ او $h(x) = \sqrt{25 - x^2}$ وي $g(-7), f(6)$

او $f(0) + g(4) - h(-3)$ پیدا کړئ.

5 – که $g(x) = \sqrt{x+40} - 2$ وي $g(12)$ ، $g(5)$ ، $g(4)$ ، $g(0)$ او $g(-2)$ پیدا کړئ.

6 – آیا د $x^2 + xy = 1$ معادله یوه تابع ښیي؟

د يوې تابع د تعريف د ساحې پيدا کول



آيا کېدای شي چې د هرې تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه وي؟

فعاليت

- د x کوم قيمتونه دتابع د تعريف په ساحه کې شامل وي؟
- د $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$ تابع د تعريف ساحه وټاکئ.
- آيا $g(x)=3\sqrt{x}$ تابع د تعريف په ساحه کې $x=-4$ شامل دی؟

د يوې تابع د تعريف په ساحه (Domain) کې د x ټول هغه قيمتونه شامل وي چې تابع په هغه قيمتونو کې تعريف شوې وي يا د تابع قيمت يو حقيقي عدد وي.

لومړی مثال: د لاندې تابع گانو د تعريف ساحه (Domain) وټاکئ.

$$f(x)=\frac{1}{x-3} \qquad h(x)=x^2-7x \qquad K(x)=\frac{6x}{x^2-9}$$

$$g(x)=\sqrt{x} \qquad R(x)=\sqrt{3x+12}$$

حل:

- د $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ تابع په $x=3$ کې تعريف شوې نه ده، ځکه چې $x=3$ لپاره د تابع مخرج صفر کېږي يا د $x=3$ لپاره د تابع قيمت يو حقيقي عدد نه دی نو:

$$\text{Dom}\,f=\{x\in IR\,/\,x\neq 3\}$$

- د $g(x)=\sqrt{x}$ په تابع کې ددې لپاره چې د تابع قيمت يو حقيقي عدد (Real number)

وي، باید $x \geq 0$ وي، نو $Dom\, g = \{x \in IR / x \geq 0\}$ یا $dom\, g = [0\ ,\ \infty)$

- $h(x) = x^2 - 7x$ په تابع کې، څرنګه چې د x د هر قیمت لپاره د $h(x)$ تابع تعریف شوي ده، نو: (د حقیقي عددونو سټ) $Dom\ h = IR = (-\infty\ ,\ \infty)$

- د $k(x) = \dfrac{6x}{x^2 - 9}$ یا $k(x) = \dfrac{6x}{(x-3)(x+3)}$ تابع د تعریف ساحه عبارت ده له:

$$Dom\, k(x) = \{x \in IR /\quad x \neq 3\ ,\quad x \neq -3\}$$

- د $R(x) = \sqrt{3x + 12}$ په تابع کې باید $3x + 12 \geq 0$ وي، نو $x \geq -4$ کېږي.

$$Dom\, R = \{x \in IR / x \geq -4\} = [-4, \infty)$$

فعالیت

د لاندې تابع ګانو د تعریف ساحه (Domain) پیدا کړئ.

$$f(x) = x^2 + 3x - 17\quad ,\quad g(x) = \frac{5x}{x^2 - 49}\quad ,\quad h(x) = \sqrt{9x - 27}$$

دویم مثال: د $y = \sqrt{x - 3}$ د تابع د تعریف ساحه پیدا کړئ.

$$x - 3 \geq 0 \quad \Rightarrow x \geq 3$$

$$Dom\ y = \{x \in IR /\ x \geq 3\} = [3\ ,\ \infty)$$

دریم مثال: د لاندې تابع ګانو د تعریف ساحه پیدا کړئ.

$f(x) = \sqrt{x - 2}$ $\qquad Dom\ f = \{x /\quad x \geq 2\}$ یا $[2, \infty]$

$g(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 4}$ $\qquad dom\, g = IR - \{4\}$ یا $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$

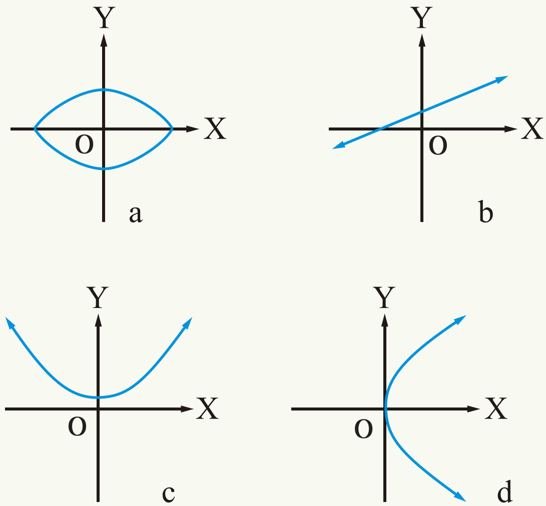
یا د سټ په شکل: $dom\, g = \{x \in IR / x \neq 4\}$

$h(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

$Dom\ h = \{x /\ x \leq -1$ یا $x \geq 3\}$ یا $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$

د یوې تابع ګراف او د ګراف له مخې د یوې تابع پېژندنه
(Graph of a function and vertical line test)

په راکړل شوو شکلونو کې کوم ګراف د یوې تابع ګراف دی؟



فعالیت

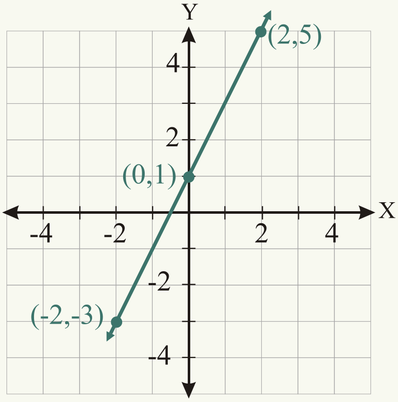
- د y له محور سره یو موازي خط رسم کړئ.
- وګورئ چې دا خط د تابع ګراف په څو نقطو کې قطع کوي؟
- که دا خط ګراف په یوه نقطه کې قطع کړي آیا دا ګراف به د یوې تابع ګراف وي؟
- که دا خط، ګراف له یوې نقطې څخه په زیاتو نقطو کې قطع کړي آیا دا ګراف به د یوې تابع ګراف وي؟

که $f(x)$ یوه حقیقي تابع وي، د $f(x)$ د تابع ګراف د $(x\ ,\ f(x))$ د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې د $y=f(x)$ په معادله کې صدق وکړي.

یا د یوې تابع ګراف د XOY د مستوي د هغو نقطو سټ دی چې $\{(x\,,y)\ /\ y=f(x)\}$ صدق کړي او $x \in dom\ f(x)$ وي.

لومړي مثال: د $y = f(x) = 2x+1$ تابع گراف رسم کړئ.

input	تابع	output	مرتبې جوړې
x	$2x+1$	$y=f(x)$	(x,y)
0	$2(0)+1$	1	$(0,1)$
2	$2(2)+1$	5	$(2,5)$
-2	$2(-2)+1$	-3	$(-2,-3)$



دويم مثال: د $f(x) = x^2+1$ او $y=-1$ تابع گانو گراف رسم کړئ.

د تعريف او د قيمتونو ساحې يې هم پيدا کړئ.

حل:

$f(x) = x^2+1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	10	5	2	1	2	5	10

د $(3\ ,10)$, $(2,5)$, $(1,2)$, $(0,1)$, $(-1\ ,2)$, $(-2\ ,\ 5)$, $(-3,10)$ مرتبو جوړو په نظر کې نيولو سره د تابع گراف رسم کړئ:

يا

$f(-3) = (-3)^2+1 = 9+1 = 10$

$f(-2) = (-2)^2+1 = 4+1 = 5$

$f(-1) = (-1)^2+1 = 1+1 = 2$

$f(0) = 0^2+1 = 0+1 = 1$

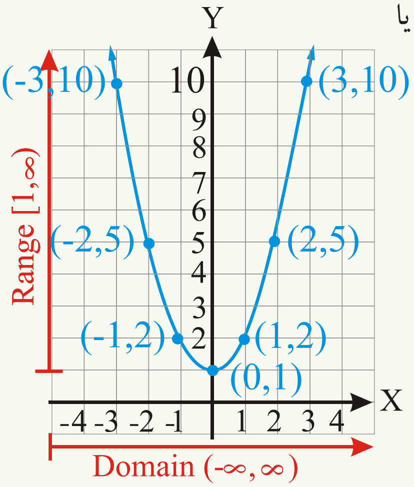
$f(1) = 1^2+1 = 2$

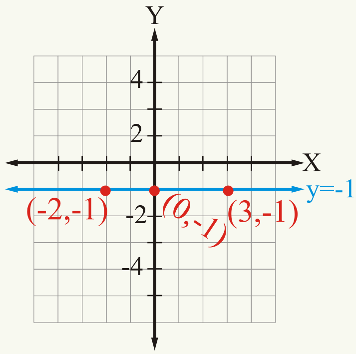
$f(2) = 2^2+1 = 5$

$f(3) = 3^2+1 = 10$

$\text{Dom}f = (-\infty,\infty)$

$\text{Range}f = (1,\infty)$





$f(x) = -1$

Input	Output	مرتبه جوړه
x	$y = f(x)$	(x, y)
-2	-1	$(-2, -1)$
0	-1	$(0, -1)$
3	-1	$(3, -1)$

$\text{Dom } y = IR$

$\text{Range } y = -1$

فعالیت

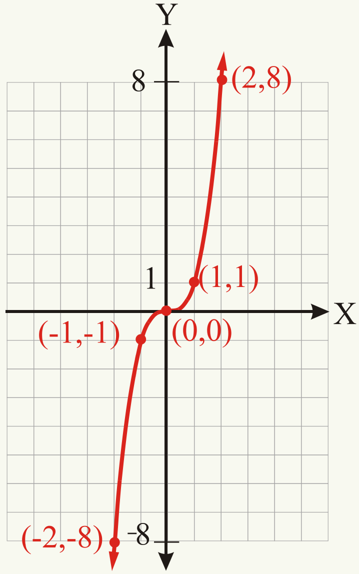
د $f(x) = x^2 - 4$ تابع ګراف رسم کړئ.

دریم مثال: د $y = f(x) = x^3$ تابع ګراف رسم کړئ.

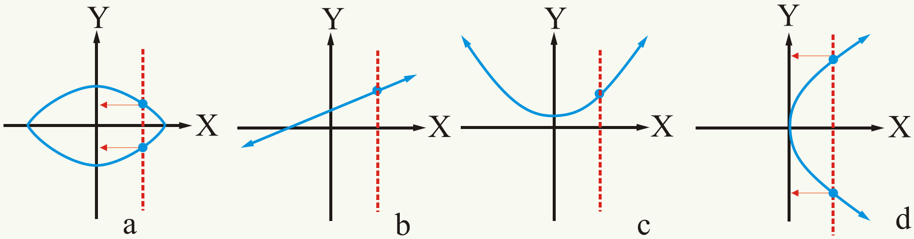
$f(x) = x^3$

x	2	1	0	-1	-2
$y = f(x)$	8	1	0	-1	-8

که یو عمودي خط (د y له محور سره موازي) یو ګراف یوازې په یوه نقطه کې قطع کړي، نو دا ګراف د یوې تابع ګراف دی او که له یوې نقطې څخه یې په زیاتو نقطو کې قطع کړي، نو دا ګراف د یوې تابع ګراف نه دی.



څلورم مثال: په لاندې راکړل شوو ګرافونو کې لیدل کېږي چې b او c د تابع ګانو ګرافونه دي، ځکه چې عمود خط یې ګرافونه په یوه نقطه کې قطع کړي دي، لیکن د a او d ګرافونه د تابع ګرافونه نه دي، ځکه چې عمودي خط ګرافونه له یوې څخه په زیاتو نقطو (دوو نقطو) کې قطع کړي دي یا د یوه x لپاره د y یا f(x) دوه قیمتونه وجود لري، نو د a او d ګرافونه د تابع ګرافونه نه دي.



د تابع د تعریف په ناحیه domain کې هغه عددونه شامل وي چې تابع په کې تعریف شوې وي یا د تابع قیمت یو حقیقي عدد وي. د یوې تابع ګراف د XOY په مستوي کې د S د نقطو سټ دی، په دې ډول چې $S=\{(x,y)\,|\,y=f(x)\}$ چې x د تابع د تعریف په ساحه کې شامل وي، که د y له محور سره موازي خط ګراف یوازې په یوه نقطه کې قطع کړي، دا ګراف د یوې تابع ګراف دی.

پوښتنې

1 - د لاندې تابع ګانو د تعریف ساحې (Domains) پیدا کړئ.

$h(x)=\sqrt{x^2-4}$ $\quad g(x)=2x-5$ $\quad f(x)=\sqrt{x^2-9}$

$h(x)=\dfrac{3}{x-4}$ $\quad g(x)=|x-3|$ $\quad f(x)=\sqrt{x+1}$

$h(x)=\dfrac{4}{x^2+11x+24}$ $\quad g(x)=\dfrac{2}{(x+3)(x-7)}$ $\quad f(x)=\dfrac{7x}{x^2-16}$

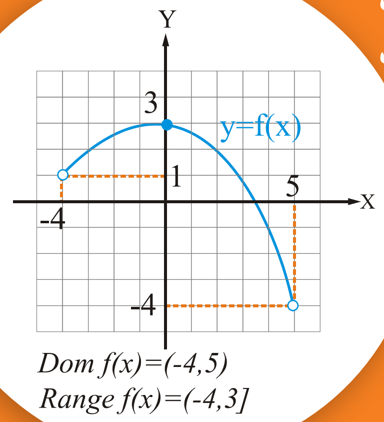
$f(x)=\dfrac{3}{x^2+4}$

2 - د $f(x)=x^2$ او $f(x)=-x^2$ د تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

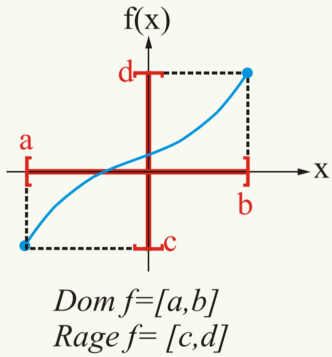
3 - د $g(x)=2x-1$ تابع ګراف رسم کړئ که $x=-3,-2,-1,0,1,2,3,$ وي.

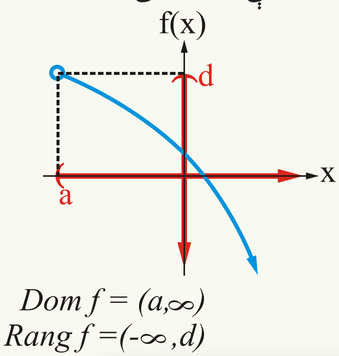
4 - د $x=y^2-2$ ګراف رسم کړئ او آیا دا د یوې تابع ګراف دی؟ ولې؟

د ګراف له مخې د يوې تابع د تعريف او د قيمتونو د ناحيو او د تابع د قيمتونو پيدا کول:



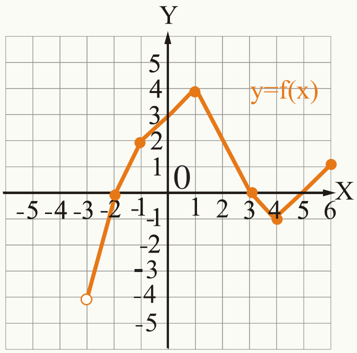
آيا د توابعو په لاندېنيو راکړل شوو ګرافونو کې د تابع د تعريف ساحه (Domain) او د قيمتونو ساحه (Range) يې ټاکلای شئ؟





فعاليت

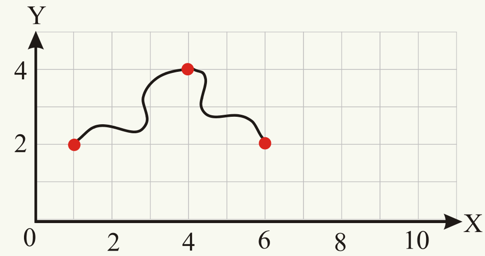
شکل وګورئ لاندېنيو پوښتنو ته ځواب ورکړئ:



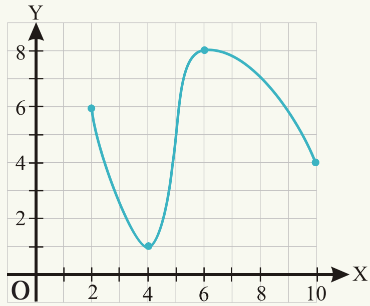
- د شکل له مخې د f تابع د تعريف او قيمتونو ساحه پيدا کړئ.
- آيا د 4 – عدد د f د تابع د قيمتونو په ساحه کې شامل دی؟ ولې؟
- آيا د 3 – عدد د f د تعريف په ساحه کې شامل دی؟ ولې؟
- آيا د 6 عدد د f د تعريف په ساحه کې شامل دی؟

لیدل کېږي چې $f(-1)=2$ او $f(1)=4$ دي او هم د شکل له مخې د تابع د تعریف ساحه له -3 څخه تر 6 پورې ده، لیکن $-3 \notin dom\ f$ او $6 \in dom\ f$، نو $dom\ f = (-3,6]$ او په همدې ډول د f(x) تابع د قیمتونو ساحه (Range) له -4 څخه تر 4 پورې ده، خو $-4 \notin Range\ f$ نو $Range\ f = (-4\ ,4]$.

لومړی مثال: په راکړل شوو شکلونو کې د تابع ګانو د تعریف او د قیمتونو ساحې پیداکړئ.



(1)



(2)

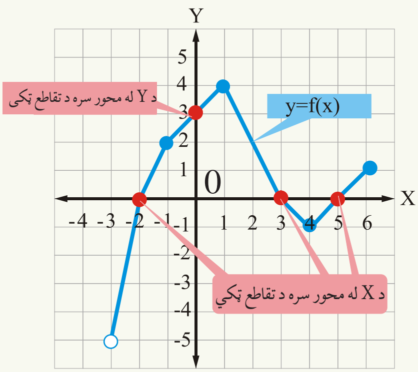
حل:

د لومړي شکل په ګراف کې د تعریف ساحه د 1 او 6 تر منځ ټول حقیقي عددونه دي او د قیمتونو ساحه یې د 2 او 4 تر منځ ټول حقیقي عددونه دي یا: $1 \le x \le 6$ او $2 \le y \le 4$

د (2) شکل په ګراف کې $2 \le x \le 10$ یا $Dom = [2\ ,\ 10]$

$1 \le y \le 8$ یا $Range = [1\ ,\ 8]$

دویم مثال: لاندې شکل په پام کې ونیسئ.



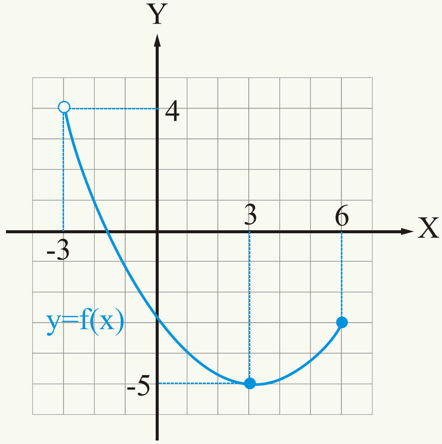
- $f(-2)$, $f(3)$ او $f(5)$ پیداکړئ.
- د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پیداکړئ.

حل: څرنګه چې د X له محور سره د ګراف د تقاطع په ټکي کې $y=0$ وي، نو $f(-2)=0$, $f(3)=0$ او $f(5)=0$ دي، نو ګراف د X محور د

$(-2, 0)$ ، $(3,0)$ او $(5 , 0)$ په نقطوکې قطع کوي.

خرنګه چې د y له محور سره د ګراف د تقاطع په ټکي کې $x = 0$ دی $f(0) = 3$ ، نوګراف د y محور د $(0,3)$ په نقطه کې قطع کوي.

دریم مثال: په لاندې شکل کې د f تابع Domain او Range پیدا کړئ، f (3) او f (6) هم په لاس راوړئ.



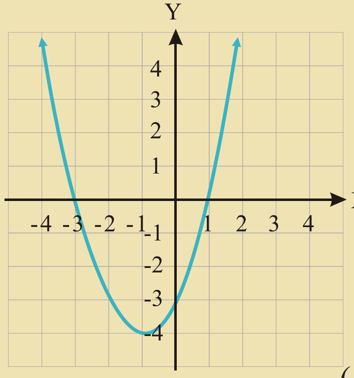
حل: لیدل کېږي چې د تعریف ساحه یې له 3 - څخه تر 6 پورې ده، خو 3 - د تعریف په ساحه کې شامل نه دی.

$$Domain\, f(x) = -3 < x \leq 6 \text{ یا } (-3 , 6]$$

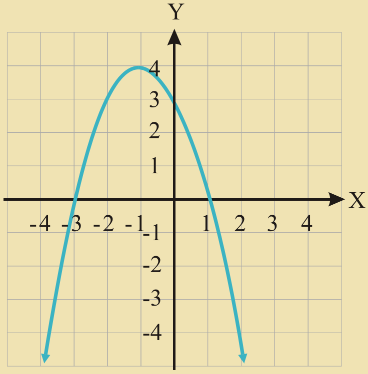
او د قیمتونو ساحه یې: $\text{Range}\, f(x) = -5 \leq y < 4$ یا $[-5 , 4)$ ، $f(6) = -3$ او $f(3) = -5$ ده.

پوښتني

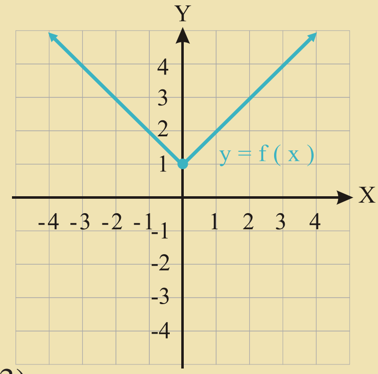
په راکړل شوو شکلونو کې:



(1)



(2)



(3) $f(-1)=?$ $f(3)=?$

a- د تابع د تعریف ساحه

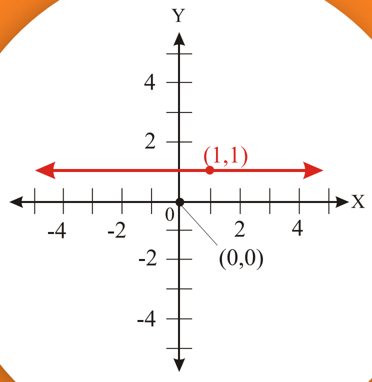
b- د تابع د قیمتونو ساحه

c- د X له محور سره د ګراف د تقاطع ټکي

d- د Y له محور سره د تقاطع ټکي او په دریم شکل کې د تابع غوښتل شوي قیمتونه پیدا کړئ.

ځيني خاصي تابع ګاني او ګرافونه يي

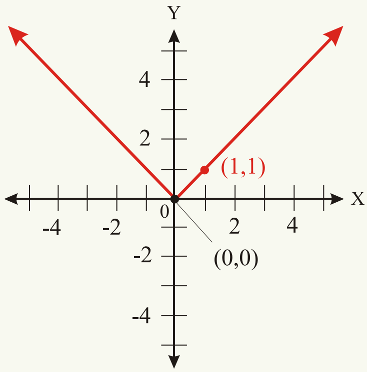
د هغو تابع ګانو نومونه واخلی چي ګرافونه يي راکړل شوي دي



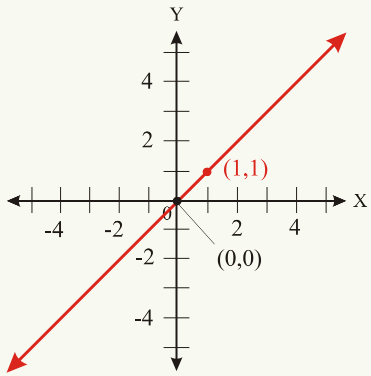
$f(x)=1$

توابع ډېر ډولونه لري چي ځيني خاصي تابع ګاني ترڅېړني لاندې نيسو:

ثابته تابع، د عينيت تابع، د مطلقه قيمت تابع، څو معادله يي تابع او د علامې تابع



$f(x)=|x|$



$f(x)=x$

فعاليت

- ثابتي تابع ته ولي ثابته تابع وايي؟
- آيا د عينيت تابع د تعريف او د قيمتونو ساحې سره مساوي وي؟
- آيا د مطلقه قيمت د تابع د قميتونو ساحه منفي قيمتونه اخيستلای شي؟

ثابته تابع (Constant Function)

که x او y د حقیقي عددونو ستونه وي، د $f: x \to y$ یا $f(x) = y$ په تابع کې که y له یوه ثابت عدد سره مساوي وي یا $y = f(x) = c$ چې (c) یو ثابت عدد دی، نو د y د ثابتې تابع په نوم یادیږي.

د مثال په ډول: $f(x) = 2$, $f(x) = -3$ او $f(x) = -2$ او داسې نورې ثابتې تابع ګانې دي.

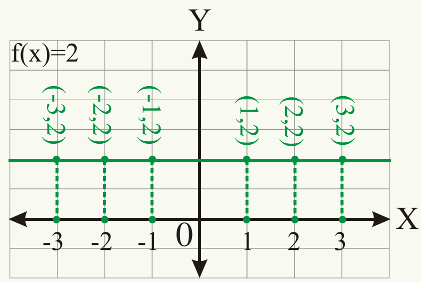
لومړی مثال: $f(x) = 2$ او $f(x) = -2$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

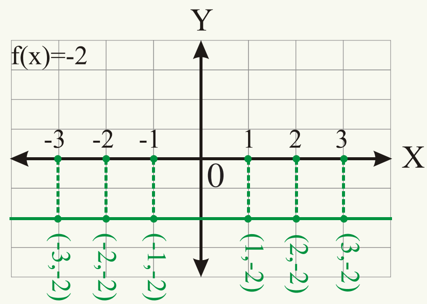
$f(x) = 2$

x =	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	2	2	2	2	2	2

$f(x) = -2$

x =	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	−2	−2	−2	−2	−2	−2

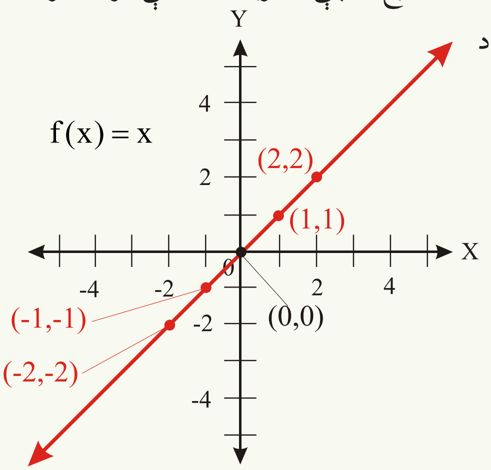




په دې معنا چې په ثابته تابع کې د تعریف د ساحې د هر عنصر تصویر همغه ثابت عدد دی.

د عینیت تابع (Identity function): هغه تابع ده چې د تعریف د ساحې هر عنصر ته له خپل ځان سره ارتباط ورکړي یا $f(x) = x$ د عینیت د تابع په نامه یادیږي.

مثال: د $f(x) = x$ د تابع ګراف رسم کړئ.



$f(x) = x$

x =	0	1	2	−1	−2	...
f(x) =	0	1	2	−1	−2	...

د مطلقه قیمت تابع (Absolute value function)

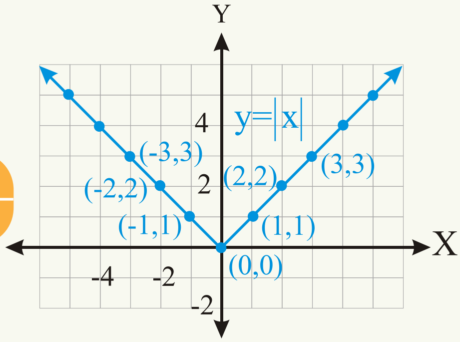
د مطلقه قمیت تابع $f(x)=|x|$ په لاندې ډول تعریف شوی ده:

$$f(x)=\begin{cases} x & , x\ge 0 \\ -x & , x<0 \end{cases}$$

لومړی مثال: د $f(x)=|x|$ تابع ګراف رسم کړئ.

$f(x)=|x|$

x =	0	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	0	1	2	3	1	2	3



لیدل کیږي چې د مطلقه قیمت د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ساحه یې $[0,\infty)$ ده.

څو معادله يي تابع (Piecewise function) او ګراف يي

آیا کېدای شي چې یوه تابع د تعریف په ساحه کې د دوو یا څو معادلو په واسطه تعریف شوي وي؟

لومړي مثال: که $f(x)=\begin{cases}2x+3 : x<4 \\ x^2-1 : 4\le x\le 10\end{cases}$ وي، نو $f(-5)$، $f(8)$ او د f تابع د تعریف ساحه پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $-5<4$ دی، نو په لومړی معادله کې وضع کېږي، لرو چې:

$$f(-5)=2(-5)+3=-10+3=-7$$

او څرنګه چې د 8 عدد د 4 او 10 ترمنځ واقع دی $4<8<10$ ، نو په دویمه معادله کې وضع کیږي لرو چې:

$$f(8)=8^2-1=64-1=63$$

د f تابع د تعریف ساحه په لومړی معادله کې $(-\infty\ ,\ 4)$ او په دویمه معادله کې $[4\ ,\ 10]$ ده، نو د

f د تعریف ساحه د $(-\infty , 10]$ څخه عبارت ده.

فعالیت

که چېرې $g(x)=\begin{cases} -\frac{11}{60}x+15 & : 0\le x<60 \\ \frac{1}{5}x-8 & : 60\le x\le 90 \end{cases}$ وي،

وښیاست چې $g(80)=8$ او $g(30)=9.5$ دی.

د څو معادله یي تابع ګراف (Graph of function defined piecewise)

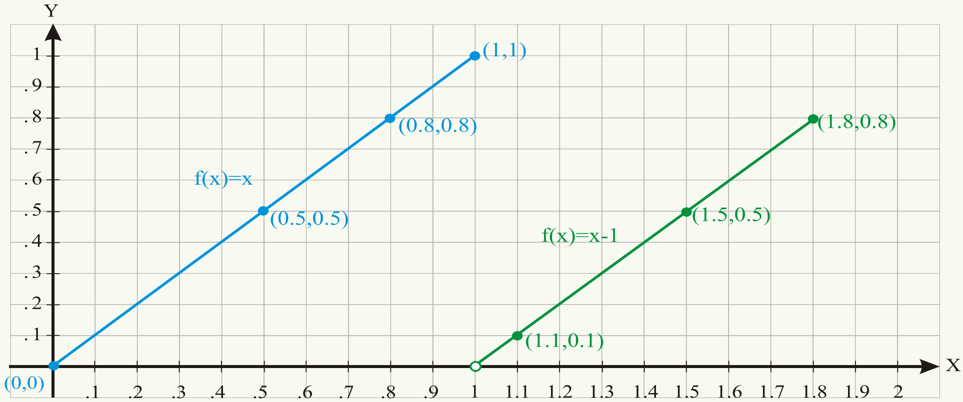
دویم مثال: د f (x) تابع د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا او ګراف یې هم رسم کړئ که:

$f(x)=\begin{cases} x : 0\le x\le 1 \\ x-1 : 1<x\le 2 \end{cases}$ وي.

حل: د لومړی معادلې د تعریف ساحه $[0,1]$ او د دویمې معادلې د تعریف ساحه $(1,2]$ ده چې په

نتیجه کې د f (x) د تعریف ساحه $[0,2]$ ده.

د ګراف د رسمولو لپاره، د دواړو برخو ګراف رسموو په دې ډول:



$y = f(x) = x$

x	0	0.5	0.8	1
y = f(x)	0	0.5	0.8	1

$y = f(x) = x - 1$

x	1,1	1,5	1,8
$f(x)$	0,1	0,5	0,8

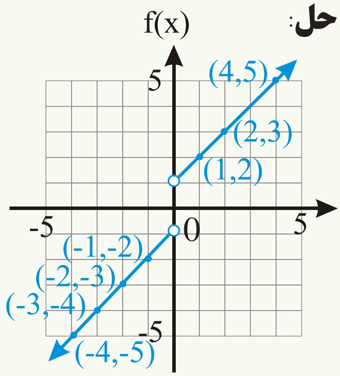
په نتیجه کې دوه مستقیم خطونه په لاس راځي چې دواړه د f (x) تابع ګراف دی.

فعالیت

که: $f(x) = \begin{cases} x \Leftarrow 0 \le x \le 4 \\ x - 1 \Leftarrow 0 < x < -4 \end{cases}$ وي، $f(0), f(-2), f(2)$ پیداکړئ او ددې تابع ګراف هم رسم کړئ.

دریم مثال: د $f(x) = \begin{cases} x - 1 \Leftarrow x < 0 \\ x + 1 \Leftarrow x > 0 \end{cases}$ تابع ګراف رسم د تعریف او د قیمتونو ساحې یې وټاکئ.

حل:



x	1	2	4	−1	−2	−3	−4
$f(x)$	2	3	5	−2	−3	−4	−5

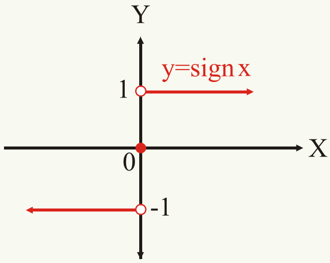
لیدل کېږي چې د تابع د تعریف په ساحه کې صفر شامل نه دی $(x \neq 0)$ یا

$Dom\ f(x) = (-\infty\ ,\ 0) \cup (0, \infty)$ او د قیمتونو ناحیه (Range) یې عبارت دی له:

$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ یا $y > 1$ او $y < -1$

د علامې تابع (Sign Function): د علامې تابع چې په sgn (x) سره ښودل کېږي د خو معادله یې تابع یو مثال دی چې په لاندې ډول تعریف شوې ده:

$$\text{sgn}(x)=\begin{cases}1 & : x>0\\ 0 & : x=0\\ -1 & : x<0\end{cases}$$ د دې تابع د تعریف ناحیه د حقیقي عددونو سټ او د قیمتونو ساحه (Range) يې $\{-1,0,1\}$ ده.



$$Dom_{sgn}=IR \qquad Range_{sgn}=\{-1\,,\,0\,,1\}$$

$f(x)=c$ ثابته تابع ، $f(x)=x$ د عینیت تابع او $f(x)=|x|$ د مطلقه قیمت تابع ده چې د تعریف ساحه يې ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ساحه يې صفر او مثبت حقیقي عددونه دي.

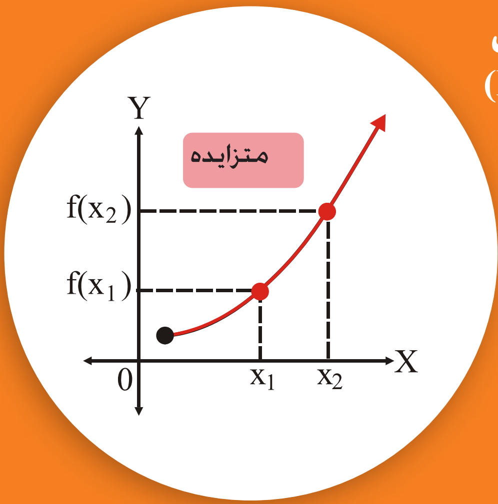
پوښتنې

1- د $f(x)=-5$ ، $g(x)=\frac{1}{2}$ او $h(x)=4$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

2 – د $f(x)=|x|-3$ تابع ګراف رسم کړئ.

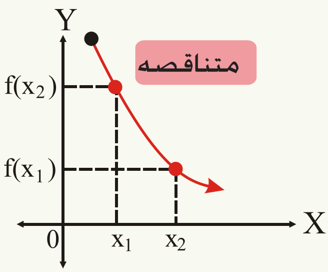
3- که $f(x)=\begin{cases}-x:x<0\\ x:x\geq 0\end{cases}$ وي $f(0)$, $f(-2,3)$ او $f(16)$ پیدا کړئ.

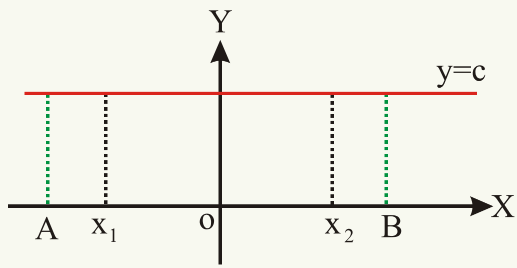
4- که $h(x)=\begin{cases}x+1:-1\leq x<0\\ -x+1:0\leq x\leq 1\end{cases}$ وي د $h(x)$ تابع د تعریف ساحه پیدا کړئ.



متزايدي او متناقصي تابع ګاني
(Increasing and decreasing functions)

- په راکړل شوو ګرافونو کې کوم ګراف د متزایدی تابع ګراف دی؟
- کوم ګراف د متناقصی تابع ګراف دی؟
- کوم ګراف نه متزاید دی او نه متناقص؟





1 – یوه تابع په یوه انټروال کې متزایده ده که $x_1 < x_2$ وي، په نتیجه کې $f(x_1) < f(x_2)$ شي.

2 – یوه تابع په یوه انټروال کې متناقصه ده که $x_1 < x_2$ وي، په نتیجه کې $f(x_1) > f(x_2)$ شي.

3 – که $x_1 < x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) = f(x_2)$ شي دا تابع نه متناقصه ده او نه متزایده.

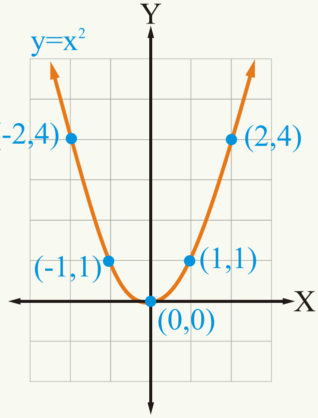
لکه: خرنګه چې په شکل کې لیدل کیږي دا یوه ثابته تابع ده.

مثال: د $f(x) = x^2$ او $f(x) = -x^2$ د تابع ګانو ګراف په کومو انټروالونو کې متزاید او په کومو انټروالو کې متناقص دی؟

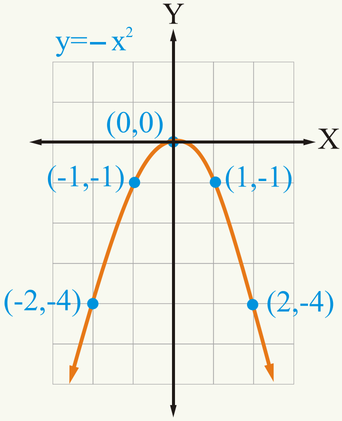
x	0	1	-1	2	-2
$f(x)=x^2$	0	1	1	4	4

x	0	1	-1	2	-2
$f(x)=-x^2$	0	-1	-1	-4	-4

$$-1 < 2$$
$$f(-1) < f(2)$$
$$1 < 4$$



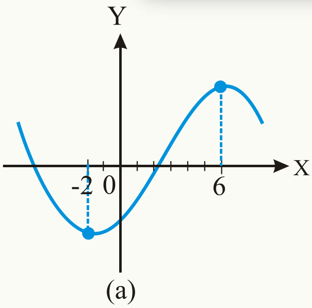
$$-1 < 2$$
$$f(-1) > f(2)$$
$$-1 > -4$$

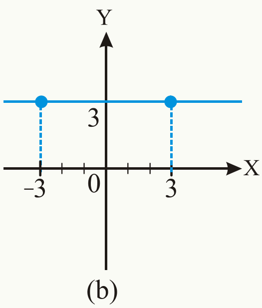


ليدل کېږي چې د $f(x)=x^2$ تابع د $(-\infty,0)$ په انټروال کې متناقصه او د $(0\ ,\ \infty)$ په انټروال کې متزایده ده، لیکن د $f(x)=-x^2$ تابع په $(-\infty,0)$ انټروال کې متزایده او د $(0,\infty)$ په انټروال کې متناقصه ده.

فعالیت

په راکړل شوو شکلونو کې د تابع ګراف په کومو انټروالونو کې متزاید په کومو کې متناقص دی، کوم ګراف نه متزاید او نه متناقص دی؟





جفتي او طاقي تابع ګاني (Even and Odd Functions):

1- د $f(x)$ تابع یوه جفته تابع ده که چېرې $f(-x)=f(x)$ وي، په دې معناکه په تابع کې د x پر ځای $-x$ عوض کړو، د تابع په قیمت کې تغیر رانه شي.

2- د $f(x)$ تابع یوه طاقه تابع ده که چېرې $f(-x)=-f(x)$ وي یا دا چې که په تابع کې د

x پر ځای $-x$ عوض کړو، د تابع قیمت منفي شي.

لومړی مثال: د $f(x)=x^2$ او $f(x)=x^3$ په تابع ګانو کې کومه تابع جفته او کومه یوه طاقه ده؟

حل: په دواړو تابع ګانو کې

د x پر ځای $-x$ عوض کوو:

$$f(-x)=(-x)^3=(-x)(-x)(-x)=-x^3$$

نو د $f(x)=x^3$ تابع یوه طاقه تابع ده،

ځکه چې $f(-x)=-f(x)$ کېږي لکه:

$f(-2)=-f(2)=-8$ او د $f(x)=x^2$ په

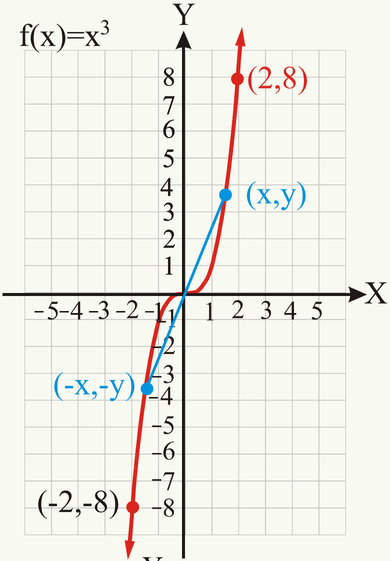
تابع کې لرو چې:

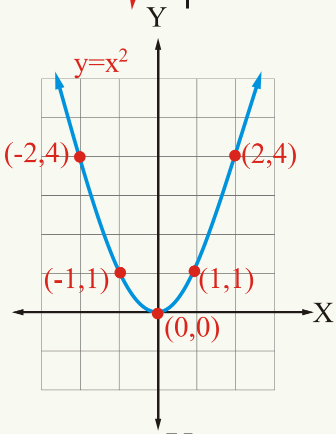
$$f(-x)=(-x)^2=(-x)(-x)=x^2$$

نو $f(x)=x^2$ یو جفته تابع ده، ځکه چې

$f(-x)=f(x)$ کېږي لکه: $f(-2)=f(2)=4$

لیدل کېږي چې د جفتو تابع ګانو ګرافونه نظر د Y محور ته او د طاقو تابع ګانو ګرافونه نظر د وضعیه کمیاتو مبدا ته سره متناظر دي.



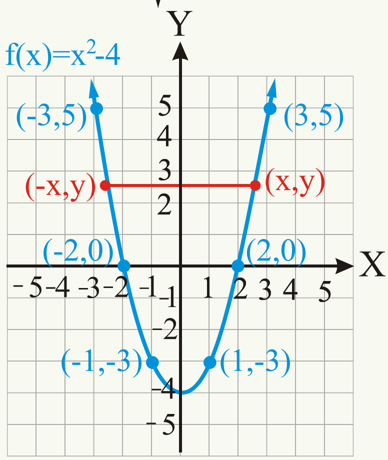


دویم مثال: د $f(x)=x^2-4$ او $g(x)=x^2+3x+2$ په تابع ګانو کې کومه یوه جفته او کومه یوه طاقه ده؟

حل:

$$f(-x)=(-x)^2-4=x^2-4=f(x)$$

نو دا تابع جفته ده، په شکل کې هم لیدل کېږي، دوه نقطې د $(3,5)$ او $(-3,5)$ تابع د $x=3$ او $x=-3$ لپاره د تابع قیمت سره مساوي دي چې د (5) عدد دی.



يعني: $f(-3)=f(3)=5$

همدارنګه د $x=2$ او $x=-2$ لپاره د تابع قیمت سره مساوي دی چې صفر دی، نو په نتیجه کې تابع جفته ده.

$$g(x)=(-x)^2+3(-x)+2=x^2-3x+2$$

چې دا تابع نه جفته او نه طاقه ده.

دریم مثال: که f له حقیقي عددونو څخه حقیقي عددونو ته یوه طاقه تابع وي او $f(-2)=k+5$ او $f(2)=2k+3$ وي، د k قیمت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې f یوه طاقه تابع ده، نو: $f(-x)=-f(x)$

د طاقې تابع د تعریف په اساس:

$$f(-2)=-f(2)$$

$$k+5=-(2k+3)$$

$$k+5=-2k-3$$

$$3k=-8$$

$$k=-\frac{8}{3}$$

که د $f(x)$ په تابع کې $x_1<x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1)<f(x_2)$ شي تابع متزایده او که $x_1<x_2$ وي او $f(x_1)>f(x_2)$ شي، تابع متناقصه ده که $f(-x)=f(x)$ وي تابع جفته او که $f(-x)=-f(x)$ شي تابع طاقه ده د جفتو تابع ګانو ګراف نظر د Y محور ته او د طاقو تابع ګانو ګراف نظر د وضعیه کمیاتو مبدأ ته سره متناظر دي.

پوښتنې

1- د لاندېنیو تابع ګانو څخه کومه یوه یې متزایده، کومه یوه یې متناقصه او کومه یوه نه متزایده او نه متناقصه ده؟

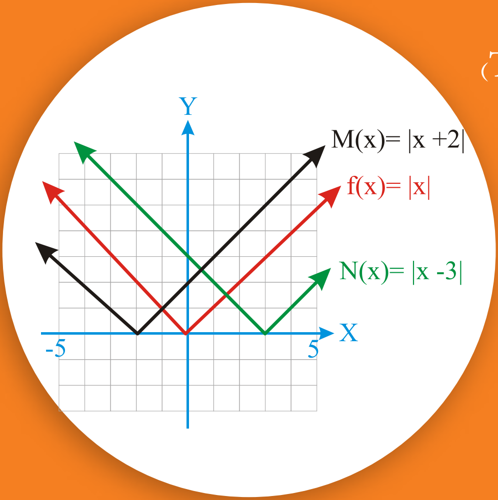
$$f(x)=x^3+x \quad , \quad f(x)=x^2+x \quad , \quad f(x)=x^2-x^4$$

2- د لاندېنیو راکړل شوو تابع ګانو څخه کومه یوه جفته او کومه یوه طاقه ده؟

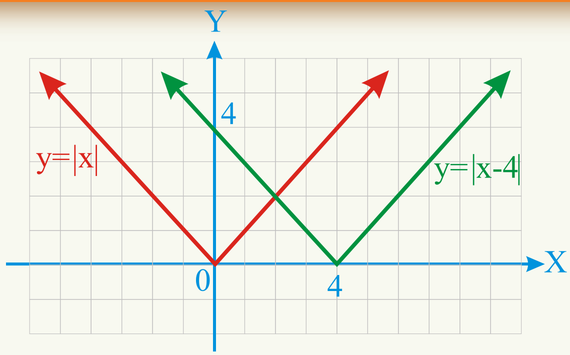
$$f(x)=x \quad , \quad f(x)=|x|$$

$$f(x)=x^4 \quad , \quad f(x)=x^5$$

د ګرافونو انتقال (Translation)



آیا کولای شئ چې ووایئ راکړل شوي ګرافونه
یو له بله سره څه اړیکه لري؟



فعالیت

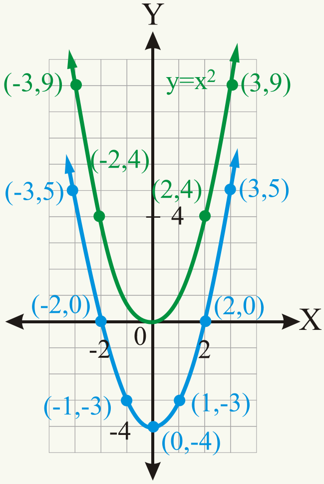
- د $f(x)=x^2$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=x^2+4$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=x^2-4$ تابع ګراف رسم کړئ.
- ووایاست چې پورتني ګرافونه یو له بله سره څه ډول اړیکه لري؟

که د $f(x)=x^2$ ګراف رسم کړو، څنګه کولای شو د $f(x)=x^2$ د ګراف له انتقال څخه د $f(x)=x^2-4$ تابع ګراف رسم کړو؟

د $y=x^2$ د ګراف د (x,y) د هرې نقطې لپاره د $(x,y-4)$ اړونده نقطه د $y=x^2-4$ په ګراف واقع ده، نو د $y=x^2$ تابع ګراف هره نقطه د 4 واحدو په اندازه ښکته خواته انتقال کوي تر څو د $y=x^2-4$ ګراف لاس ته راشي، لکه: څنګه چې په شکل کې لیدل کېږي، دا انتقال

د عمودي انتقال (Vertical Translation) په نوم يادېږي.

انتقال په دوه ډوله دی: عمودي انتقال او افقي انتقال.



1- **عمودي انتقال** (Vertical Translation):

عمودي انتقال پورته او يا ښکته خواته وي.

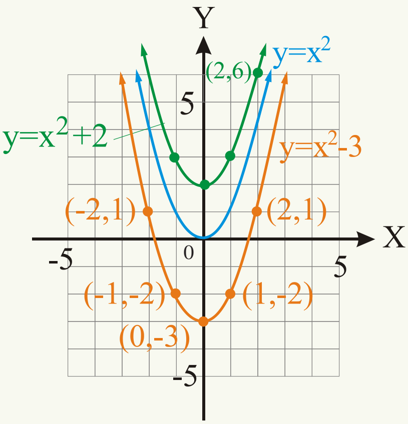
که $c > 0$ وي:

1: که د $y = f(x)$ د تابع گراف د c په اندازه پورته خواته انتقال شوی وي، نو د $y = f(x) + c$ گراف لاس ته راځي.

2: که د $y = f(x)$ د تابع گراف د c په اندازه ښکته خواته انتقال شوی وي، نو د $y = f(x) - c$ گراف لاس ته راځي.

لومړی مثال: د $y = x^2 + 2$ او $y = x^2 - 3$ تابع گانو گرافونه د $y = x^2$ تابع له گراف سره څرنگه اړيکه لري؟ درې واړه گرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم کړئ.

حل: د $y = x^2$ تابع گراف د (2) واحدو په اندازه پورته خواته انتقالوو، ترڅو د $y = x^2 + 2$ د تابع گراف په لاس راشي او که د $y = x^2$ تابع گراف د (3) واحدو په اندازه ښکته خواته نقل کړو، د $y = x^2 - 3$ تابع گراف لاس ته راځي:



x =	0	1	2	−1
$y = x^2$	0	1	4	1
$y = x^2 + 2$	2	3	6	3
$y = x^2 - 3$	−3	−2	1	−2

يا عمودي انتقال داسې هم تعريفولای شو:

که د تابع په گراف کې د y پر ځای $y - a$ وضع کړو داسې چې a يو ثابت عدد دی، نو گراف د $|a|$ په اندازه په عمودي ډول انتقال کوي که $a > 0$ وي، انتقال په عمودي ډول پورته خواته او که $a < 0$ وي گراف د $|a|$ په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال کوي.

دویم مثال: د $y=x^2$ تابع ګراف له انتقاله څخه د $y=x^2+2$, $y=x^2-2$ ، $y=x^2+4$ او $y=x^2-4$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

$y=x^2$

x	y
0	0
±1	1
±2	4

$y=x^2+2$

x	y
0	2
±1	3
±2	6

$y=x^2+4$

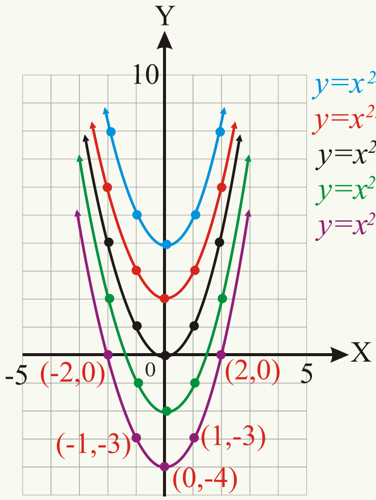
x	y
0	4
±1	5
±2	8

$y=x^2-2$

x	y
0	-2
±1	-1
±2	2

$y=x^2-4$

x	y
0	-4
±1	-3
±2	0



افقي انتقال: (Horizontal Translation)

که د تابع په ګراف کې د x پر ځای $x-b$ وضع شي چې b یو ثابت عدد دی. د تابع ګراف د $|b|$ په اندازه په افقي ډول انتقال کوي، که $b>0$ وي ګراف ښي خواته او که $b<0$ وي، ګراف کیڼې خواته انتقال کوي.

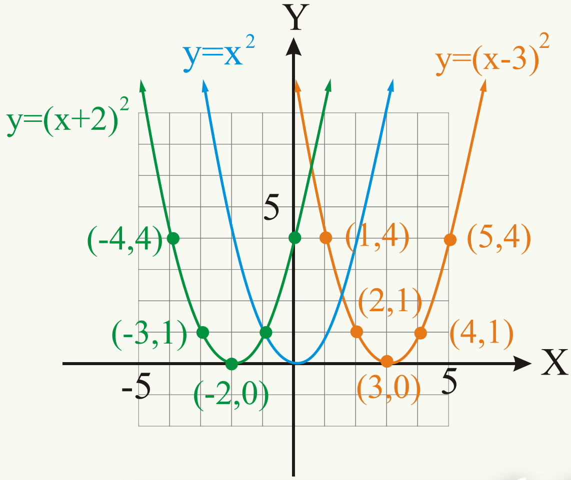
دریم مثال: د $y=x^2$ ګرا ف له انتقال څخه د $y=(x+2)^2$ او $y=(x-3)^2$ ګرافونه رسم کړئ.

حل: لکه څنګه چې په شکل کې لیدل کیږي که د $y=x^2$ تابع ګراف د 2 واحدو په اندازه کیڼې

خواته انتقال کړو، د $y=(x+2)^2$ ګراف لاس ته راځي، که د $y=x^2$ ګراف 3 واحده ښي خواته انتقال کړو، د $y=(x-3)^2$ د تابع ګراف لا س ته راځي، لکه: څنګه چې په شکل کې هم ليدل کيږي.

x	-2	0	-1	-3	-4	....
$y=(x+2)^2$	0	4	1	1	4	....

$x=$	3	4	2	5	1	....
$y=(x-3)^2$	0	1	1	4	4	....



فعاليت

د $f(x)=|x|$ تابع ګراف له انتقال څخه د $g(x)=|x+2|$ او $h(x)=|x-3|$ تابع ګانو ګرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم کړئ.

د عمودي او افقي انتقالونو ترکيب:

(Combining Horizontal and Vertical Shifts)

خلورم مثال: د $g(x)=(x+1)^2$ او $h(x)=(x+1)^2-3$ د تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

حل: لومړی د $f(x)=x^2$ تابع ګراف رسموو چې د دويمې درجې تابع د معياري ګراف په نامه يادېږي لومړی د ګراف پر مخ د $(0,0)$, $(2,4)$ او $(-2,4)$ درې نقطې ټاکو.

بیا د $g(x)=(x+1)^2$ تابع ګراف رسموو چې د $f(x)=x^2$ د تعریف له ساحې سره د (1) عدد جمع کوو، ترڅو چې د $f(x)=x^2$ ګراف کيڼې خواته د یو واحد په اندازه نقل شي، په دویم شکل کې ښودل شوی دی. په پای کې د $f(x)=(x+1)^2-3$ تابع ګراف د رسمولو لپاره د دویم شکل ګراف د 3 واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقالوو چې ګراف یې په دریم شکل کې ښودل شوی دی:

$f(x)=x^2$

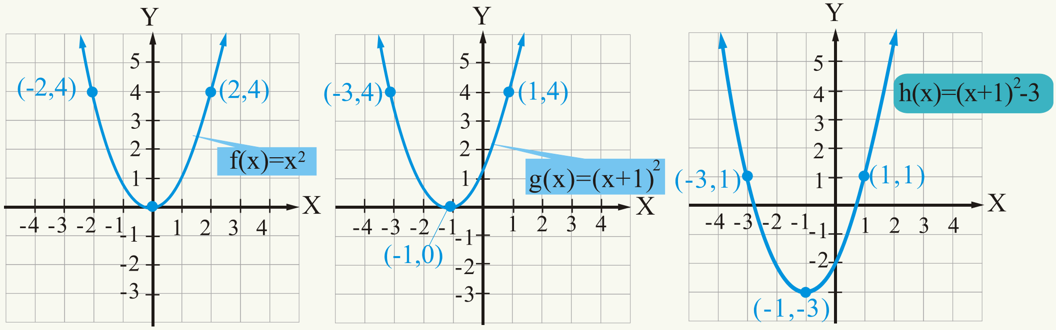
x	0	2	−2
f(x)	0	4	4

$g(x)=(x+1)^2$

x	−1	1	−3
f(x)	0	4	4

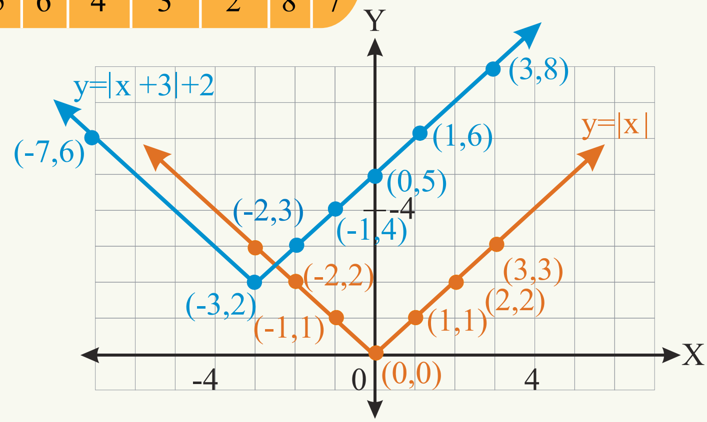
$f(x)=(x+1)^2-3$

x	1	−3	−1
f(x)	1	1	−3



پنځم مثال: د $y=|x|$ تابع ګراف له انتقال کولو څخه د $y=|x+3|+2$ تابع ګراف رسم کړئ.

x	0	1	−1	−2	−3	3	2
$y=\|x\|$	0	1	1	2	3	3	2
$y=\|x+3\|+2$	5	6	4	3	2	8	7



انتقال په (2) ډول دی، (عمودي او افقي)

عمودي انتقال: که c یو مثبت عدد وي.

1- که چېرې د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول پورته خواته انتقال شي، د $y = f(x) + c$ تابع ګراف لاس ته راځي.

2- که د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال شي د $y = f(x) - c$ تابع ګراف لاس ته راځي.

افقي انتقال: که c یو مثبت عدد وي.

1- که د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه کیڼې خواته انتقال شي، د $y = f(x+c)$ ګراف لاس ته راځي.

2- که د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه ښي خواته انتقال شي، د $y = f(x-c)$ د تابع ګراف لاس ته راځي.

پوښتنې

1- د $y = x^2$ تابع ګراف له انتقال څخه د لاندېنیو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

$g(x) = x^2 - 2$, $g(x) = x^2 - 1$, $g(x) = (x-2)^2$

2- د $f(x) = \sqrt{x}$ تابع ګراف رسم کړئ او ددې له انتقال څخه د $f(x) = \sqrt{x} + 2$ او $f(x) = \sqrt{x+2}$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

3- د $f(x) = |x|$ تابع ګراف رسم کړئ او ددې ګراف له انتقال څخه د $g(x) = |x| + 4$, $g(x) = |x+4|$ او $h(x) = |x-4|$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

4- د $f(x) = x^3$ تابع ګراف له انتقال څخه د $g(x) = x^3 - 3$ او $g(x) = (x-3)^3$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

$$f(x)=\sqrt{4-x}$$
$$g(x)=\sqrt{3+x}$$
$$(f+g)(x)=?$$

د تابع ګانو عمليې
(Operations on functions)

که $f(x)=x+2$ او $g(x)=2x+11$ وي $(f+g)(x)$ او $(f-g)(x)$ پیدا کولای شئ؟

د تابع ګانو څلورګوني عملیې په لاندې ډول تعریف شوي دي:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad (f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x).\ g(x) \qquad (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x)\neq 0)$$

$$\text{dom}\,(f+g)(x)=\text{dom } f \cap \text{ dom}\,g$$
$$\text{dom}\,(f-g)(x)=\text{dom } f \cap \text{ dom}\,g$$
$$\text{dom}\,(f\cdot g)(x)=\text{dom } f \cap \text{ dom}\,g$$
$$\text{dom}\,(\frac{f}{g})(x)=\text{dom } f \cap \text{ dom}\,g \ - \ \{x/g(x)=0\}$$

لومړی مثال: که $f(x)=2x+1$ او $g(x)=x^2-4$ وي، $(f+g)\,(x)$ پیدا کړئ او هم د دې تابع د تعریف ساحه په لاس راوړئ.

حل:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f+g)(x)=(2x+1)+(x^2-4)=2x-3+x^2=x^2+2x-3$$
$dom\ g=IR$ او $dom\ f=IR$
$$dom(f+g)(x)=IR\cap IR=IR$$

دویم مثال: که $f(x)=x^2-3$ او $g(x)=4x+5$ وي، $(f+g)(x)$ او $(f+g)(3)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f+g)(x)=(x^2-3)+(4x+5)=x^2+4x+2$$
$$(f+g)(3)=3^2+4(3)+2=9+12+2=23$$
$$\text{dom } g=IR \quad \square \quad \text{dom } f=IR$$
$$\text{dom}(f+g)(x)=IR\cap IR=IR$$

فعالیت

که $f(x)=3x^2+4x-1$ او $g(x)=2x+7$ وي، $(f+g)(x)$ او $(f+g)(4)$ پیدا کړئ.

دریم مثال: که $f(x)=2x-1$ او $g(x)=x^2+x-2$ وي، $(f-g)(x)$ $(f\cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})(x)$ پیدا کړئ او د تعریف ساحې یې هم وټاکئ.

حل

$$(f-g)(x)=(2x-1)-(x^2+x-2)=2x-1-x^2-x+2=-x^2+x+1$$

خرنگه چې $dom\ f=IR$ او $dom\ g=IR$

$$dom(f-g)(x)=IR\cap IR=IR$$
$$(f\cdot g)(x)=(2x-1)(x^2+x-2)=2x^3+x^2-5x+2$$
$$dom(f\cdot g)(x)=IR\cap IR=IR$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{2x-1}{x^2+x-2}=\frac{2x-1}{(x+2)(x-1)}$$
$$\text{dom}(\frac{f}{g})(x)=IR\cap IR-\{x/g(x)=0\}$$
$$\text{dom}(\frac{f}{g})(x)=\{x\in IR/x\neq -2 \text{ او } x\neq 1\}$$

فعالیت

که $f(x)=x-5$ او $g(x)=x^2-1$ وي، نو $(\frac{f}{g})(x)$ ، $(f\cdot g)(x)$ او $(f-g)(x)$ پیدا کړئ.

څلورم مثال: که $f(x)=x+3$ او $g(x)=x-1$ وي، $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})(x)$ پیداکړئ.

حل:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x+3-(x-1)=x+3-x+1=4$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x+3)(x-1)=x^2+2x-3$$

څرنګه چې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې ټول حقیقي عددونه شامل دي (x هر حقیقي عدد اخیستلای شي) یا $dom\ f=IR$ په همدې ډول: $dom\ g=IR$

$$dom(f-g)(x)=IR\bigcap IR=IR$$
$$dom(f\cdot g)(x)=IR\bigcap IR=IR$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+3}{x-1}\quad(x\neq 1)$$
$$dom(\frac{f}{g})(x)=IR-\{1\}$$

یا
$$dom(\frac{f}{g})(x)=\{x\in IR/x\neq 1\}$$

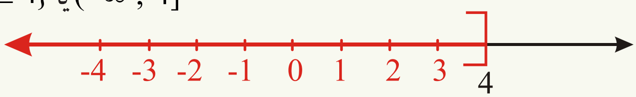
یا
$$dom(\frac{f}{g})(x)=(-\infty,1)\bigcup(1,\infty)$$

پنځم مثال: که $f(x)=\sqrt{4-x}$ او $g(x)=\sqrt{3+x}$ وي، $f+g$, $f-g$ $f\cdot g$ او $\frac{f}{g}$ پیداکړئ او د تعریف ناحیه (Domain) یې وټاکئ.

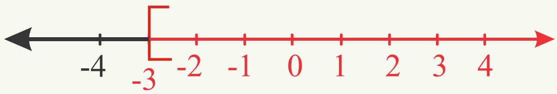
حل:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{3+x}$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{4-x}-\sqrt{3+x}$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(\sqrt{4-x})(\sqrt{3+x})=\sqrt{(4-x)(3+x)}$$
$$=\sqrt{12+x-x^2}$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3+x}}=\sqrt{\frac{4-x}{3+x}}$$

$dom\,f:\{4-x\geq 0\ ,\ x\leq 4\}$ یا $(-\infty\ ,\ 4]$

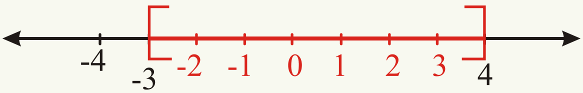


$\text{dom}\, g : \{x / 3 + x \geq 0 , x \geq -3\}$ یا $[-3 , \infty)$

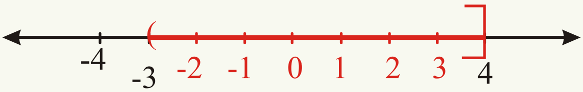


$(-\infty , 4] \cap [-3 , \infty) = [-3 , 4]$

چې $[-3,4]$ د $f+g$, $f-g$ او $f \cdot g$ د تابع ګانو د تعریف ساحه ده.



د $dom\frac{f}{g}$ د تعریف په ناحیه کې څرنګه چې $g(-3)=0$ دی، نو: $Dom\frac{f}{g} = (-3 , 4]$



له ثابت عدد سره د تابع د ضرب حاصل

که c یو ثابت عدد او f یوه تابع وي، نو حاصل ضرب یې عبارت دی له:

$(c\, f)(x) = c \cdot f(x)$

شپږم مثال: که $f(x) = x^2 - x + 2$ او $c = 5$ وي.

$(5\ f)(x) = 5 \cdot f(x) = 5(x^3 - x + 2) = 5x^3 - 5x + 10$

پوښتنې

لاندې تابع ګانې په پام کې ونیسئ .

1 - $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})x$ پیدا کړئ.

2- د تعریف ناحیې یې وټاکئ.

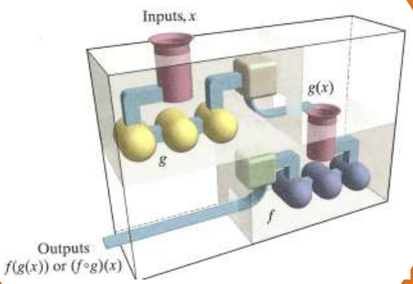
$a: f(x) = 2x+3$ ، $g(x) = x-1$ ، $b: f(x) = x-5$ ، $g(x) = 3x^2$

$c: f(x) = 2x^2 - x - 3$ ، $g(x) = x+1$ ، $d: f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = x-5$

$e: f(x) = \sqrt{x+4}$ ، $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، $f: f(x) = \sqrt{3x}$ ، $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

د تابع ګانو ترکیب یا مرکبې تابع ګانې

composition of functions or composite functions



فعالیت

- که $f(x)=x^2-2$ او $g(x)=x+3$ وي، $(f\,o\,g)(x)$ او $(g\,o\,f)(x)$ پیدا کړئ.
- په کوم حالت کې $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)$ وي.
- $(f\,o\,f)(x)$ او $(g\,o\,g)(x)$ پیدا کړئ.

که چیرې f او g د x تابع ګانې وي د f ترکیب له g سره د $(f\,o\,g)(x)$ یا $f(g(x))$ سره ښودل کیږي $(f\,o\,g)(x)=f(g(x))=f[g(x)]$

د $(f\,o\,g)(x)$ د تعریف ساحه عبارت له x څخه ده چې x د g د تعریف په ساحه کې او $g(x)$ د f د تعریف په ساحه کې شامل وي.

یا: د (f o g) تعریف ساحه: $\mathrm{Dom}(fog)x=\{x\in IR / x\in \mathrm{dom}\,g, g(x)\in \mathrm{dom}\,f\}$

1- چې x د g د تعریف په ساحه کې شامل وي.

2- $g(x)$ د f د تعریف په ساحه کې شامل وي.

په پورتني شکل کې $(f\,o\,g)(x)$ تابع د دوو ماشینو په واسطه ښودل شوي ده چې په لومړي ماشین کې ورودي x ، (in put) دی او خروجي (output) یې g(x) ده، په دویم ماشین کې (input) یې $g(x)$ او (output) یې $(fog)(x)$ دی. که g(x) د f د تعریف په ساحه کې شامل نه وي، نو په دویم ماشین (f) کې داخلېدلای نه شي.

$$x \xrightarrow{g} \boxed{g(x)} \xrightarrow{f} f(g(x))$$

$$x \xrightarrow{f} \boxed{f(x)} \xrightarrow{g} g(f(x))$$

لومړی مثال: که $f(x)=x^2-1$ او $g(x)=3x$ وي $(f o g)(x)$ او $(g o f)(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f o g)(x)=f(g(x))=f(3x)=(3x)^2-1=9x^2-1$$

$$(g o f)(x)=g((f(x))=g(x^2-1)=3(x^2-1)=3x^2-3$$

لیدل کېږي چې:

$$(f o g)(x)\neq(g o f)(x)$$

$$9x^2-1\neq 3x^2-3$$

دویم مثال: که $f(x)=3x-4$ او $g(x)=x^2+6$ وي $(f o g)(x)$ او $(g o f)(x)$ پیدا کړئ.

حل: په حقیقت کې په $(f o g)(x)$ کې د $g(x)$ تابع د f په تابع کې د (Domain) یا x ځای نیسي

$$f(g(x))=f(x^2+6)=3(x^2+6)-4=3x^2+18-4=3x^2+14$$

$$g(f(x))=(g o f)(x)=g(3x-4)=(3x-4)^2+6=9x^2-24x+22$$

ښکاره خبره ده چې د $(f o g)(x)$ او $(g o f)(x)$ د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

فعالیت

که $f(x)=x+6$ او $g(x)=x-6$ وي، وښیاست چې $(f o g)(x)=(g o f)(x)$ دی.

دریم مثال: که $g(x)=1-x$ او $f(x)=\sqrt{x}$ وي:

لومړی د fog او gof د تعریف ساحې پیدا کړئ، بیا $f o g$ او gof په لاس راوړئ.

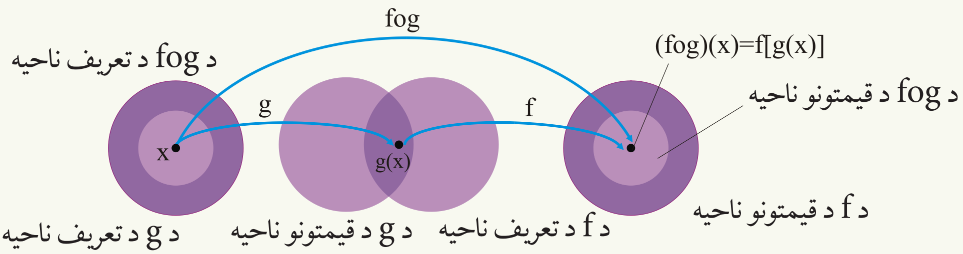
حل: د f تابع د تعریف ساحه $[0,\infty)$ او د g تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه $(-\infty,\infty)$ دي.

یا: $\mathrm{Domf}=[0,\infty)$ $\qquad$ $\mathrm{Domg}=(-\infty,\infty)$

یا: $\mathrm{Dom(fog)}=\{x/x\in \mathrm{domg}\ ,\ g(x)\in \mathrm{domf}\}$

$$Dom(fog)=\{x / x\in IR\ ,\ 1-x\ge 0\}\ ,\ -x\ge -1 \Rightarrow\ x\le 1=(-\infty,1]$$
$$Dom\,(g\,o\,f\,)=\{x / x\in dom\,f\,,f(x)\in dom\,g\}=\{x / x\ge 0\ ,\sqrt{x}\in IR\}=(0,\infty]$$
$$(f\,o\,g)(x)=f(1-x)=\sqrt{1-x}$$
$$(g\,o\,f)(x)=g(\sqrt{x})=1-\sqrt{x}$$

د مرکبو تابع ګانو د تعریف د ساحې د لا روښانتیا لپاره لاندې شکل وګورئ.



څلورم مثال:که $h(x)=\sqrt{3x^2+1}$ وي، په دوو طریقو سره وښیاست چې د $h(x)$ تابع د کومو دوو تابع ګانو له ترکیب څخه په لاس راغلې ده؟

حل: د $h(x)$ تابع کولای شو د $(g\,o\,f)(x)$ او $(jok)(x)$ دوو تابع ګانو د ترکیب په شکل ولیکو.

په دې ډول که: $f(x)=3x^2+1$ او $g(x)=\sqrt{x}$ وي.

$$(g\,o\,f)(x)=g\big(f(x)\big)=g(3x^2+1)=\sqrt{3x^2+1}$$

په همدې ډول کولای شو د $h(x)$ تابع د $(jok)(x)$ د دوو تابع ګانو د ترکیب په شکل ولیکو. په دې ډول چې: $j(x)=\sqrt{x+1}$ او $k(x)=3x^2$ وي.

$$(j\,o\,k)(x)=j\big(k(x)\big)=j(3x^2)=\sqrt{3x^2+1}$$

پنځم مثال:که $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$ ، $(x\neq -2)$ وي، $f(f(x))$ $(f\,o\,f)(2)$ او $(fo\,fo\,f)(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f\,o\,f)(x)=\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{x}{x+2}+2}=\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{x+2x+4}{x+2}}=\frac{x}{x+2}\cdot\frac{x+2}{3x+4}=\frac{x}{3x+4}$$

$$(fof)(2)=?\quad (fof)(x)=\frac{x}{3x+4}\Rightarrow (fof)(2)=\frac{2}{3\cdot 2+4}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$$(fofof)(x)=\frac{\frac{x}{x+2}}{3(\frac{x}{x+2})+4}=\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{3x}{x+2}+4}=\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{3x+4x+8}{x+2}}$$

$$=\frac{x}{x+2}\cdot\frac{x+2}{7x+8}=\frac{x}{7x+8}$$

فعاليت

که $f(x)=x^2-2$ او $g(x)=x+3$ وي، $(f\,o\,g)(x)$, $(g\,o\,f)(x)$ ، $(g\,o\,f)(-2)$ او $(fog)(3)$ پیدا کړئ.

پوښتني

1- که $f(x)=-3x+2$ او $g(x)=x^3$ وي:

$(\frac{g}{f})(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $(g-f)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f+g)(x)$ پیدا او د تعریف ساحې یې هم وټاکئ.

2- که $f(x)=x^2-3$ او $g(x)=\sqrt{x-3}$ وي، $(f\cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$ او $(\frac{g}{f})(x)$ پیدا کړئ.

3- که $f(x)=x^2+1$, $g(x)=\frac{1}{x}$, $h(x)=\sqrt{4-x^2}$ او $k(x)=\sqrt{3x+4}$ وي، د $(f\cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$, $(h\cdot k)(x)$ او $(\frac{h}{k})(x)$ تابع ګانو د تعریف ساحې پیدا کړئ.

4- که $f(x)=3x-2$, $g(x)=x^2$ وي $(g\,o\,f)(3)$ او $(f\,o\,g)(1)$ پیدا کړئ.

5- که $f(x)=\sqrt{x}$ او $g(x)=\sqrt{2-x}$ وي، $f\,o\,g$ $g\,o\,f$ او $f\,o\,f$ پیدا کړئ.

6- که $f(x)=\frac{x}{x+1}$, $g(x)=x^{10}$ او $h(x)=x+3$ وي $(f\,o\,goh)(x)$ پیدا کړئ.

معکوسه تابع (Inverse Function)



فعالیت

- په شکل کې د دواړو تابع ګانو ترمنځ کومه اړیکه شتون لري؟
- آیا د هرې تابع معکوس، هم یوه تابع وي؟
- که د یوې تابع معکوس هم یوه تابع وي، داسې تابع په څه نامه یادیږي؟
- که $f=\{(1,2)(3,5)(6,7)\}$ او $g=\{(2,1)(5,3)(7,6)\}$ وي آیا د g تابع د f معکوسه تابع ده او که نه؟ ولې؟
- که $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)$ وي، آیا g د f تابع معکوسه تابع ده؟

په پورتني شکل کې یو ترمامیتر لیدل کېږي او پوهېږو چې د سانتي ګرېډ او فارنهایټ د تودوخې د درجو ترمنځ د $f=\frac{9}{5}c+32$ اړیکه شته دی، که دا معادله د (c) له پاره حل شي لرو چې:

$$f=\frac{9}{5}c+32\Rightarrow f-32=\frac{9}{5}c+32-32$$

$$\Rightarrow\frac{5}{9}(f-32)=\frac{5}{9}(\frac{9}{5}c)$$

$$c=\frac{5}{9}(f-32)$$

د c تابع د f معکوسه تابع ده.

د (x,y) رابطې معکوس له (y,x) څخه عبارت ده چې د معکوسې تابع د تعریف ساحه د تابع

د قیمتونو د ساحې او د معکوسې تابع د قیمتونو ساحه، د تابع د تعریف له ساحې څخه عبارت ده.

$domain f^{-1} = Range f$ او $Range\ f^{-1} = dom\ f$

د f د تابع معکوس په f^{-1} ښودل کېږي، پام مو وي چې: $(f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)})$

لومړی مثال: که $f(x) = \{(1,5)(3,7)(8,-10)\}$ وي.

نو $f^{-1}(x) = \{(5,1)(7,3)(-10,8)\}$ ده. ځکه چې:

$$f(3) = 7 \qquad f^{-1}(7) = 3$$
$$f(1) = 5 \qquad f^{-1}(5) = 1$$
$$f(8) = -10 \qquad f^{-1}(-10) = 8$$

نو $f^{-1}(x)$ هم یوه تابع ده.

خو که $f(x) = \{(1,2)(3,2)(4,5)\}$ وي، $f^{-1}(x) = \{(2,1)(2,3)(5,4)\}$ ده.

لیدل کېږي چې $f^{-1}(x)$ یوه تابع نه ده، ځکه د $x = 2$ لپاره دوه مختلف تصویرونه په (Range) کې وجود لري. $f(2) = 1$ او $f(2) = 3$.

نو د هرې تابع معکوس یوه تابع نه وي، یا په بل عبارت هره تابع معکوس منونکې نه وي.

څه وخت چې یوه تابع د مرتبو جوړو په شکل راکړل شوې وي، که د لومړیو او دویمو عناصر ځایونه یې یو تر بله تبدیل کړو، هغه رابطه چې لاسته راځي، د لومړنۍ تابع معکوسه ده، هغه تابع چې معکوس یې هم تابع وي، نو تابع معکوس منونکې ده.

دویم مثال: آیا د f او g تابع ګانې چې په لاندې ډول د مرتبو جوړو په شکل راکړل شوې دي معکوس منونکې دي که نه؟

$f = \{(1,2), (-2,3), (3,1), (0,-1)\} \quad g = \{(2,4), (3,1), (0,2), (5,1)\}$

حل: که د مرتبو جوړو د لومړنیو او دویمو عناصرو ځایونه یو تر بله تبدیل شي، نو لرو چې:

$f^{-1} = \{(2,1), (3,-2), (1,3), (-1,0)\}$

لیدل کېږي چې f^{-1} یا د f تابع معکوس هم یوه تابع ده، ځکه چې د f^{-1} د مرتبو جوړو لومړنی عناصر تکرار شوي نه دي. او $g^{-1} = \{(4,2), (1,3), (2,0), (1,5)\}$

لیدل کېږي چې g^{-1} یا د $g(x)$ معکوس تابع نه ده، ځکه د $x=1$ لپاره دوه قیمتونه د 3 او 5 وجود لري، نو د g تابع معکوس منونکی تابع نه ده.

په لنډ ډول څرنګه چې f یو په یو تابع ده، نو معکوس منونکي هم ده او د g تابع چې یو په یو تابع نه ده، نو معکوس منونکي هم نه ده.

نتیجه: یوازې د یو په یو تابع معکوس هم یوه تابع وي.

یو په یو تابع (one-to-one function)

د $f(x)$ تابع یوه یو په یو تابع ده که چېرې $x_1 \neq x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) \neq f(x_2)$ شي.

یا : $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ او که $a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$

که یوه تابع یو په یو وي، نو معکوس یې هم یوه تابع ده.

دریم مثال: که $f(x) = -4x+12$ او $g(x)=\sqrt{25-x^2}$ وي، وښیاست چې کومه یوه له دې تابع ګانو څخه یو په یو تابع ده؟

حل:که $a \neq b$ وي، $-4a+12 \neq -4b+12$ دی.

نو $f(x)$ یوه یو په یوتابع ده.

د مثال په ډول: که $x=2$ وي:

$$f(2)=-4(2)+12=-8+12=4$$

که $x=3$ وي:

$$f(3)=-4(3)+12=-12+12=0$$

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

$$2 \neq 3 \Rightarrow 4 \neq 0$$

نو $f(x)$ یو په یو تابع ده. او $g(x)=\sqrt{25-x^2}$ لپاره:

که $x=3$ وي. $g(3)=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

که $x=-3$ وي. $g(-3)=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

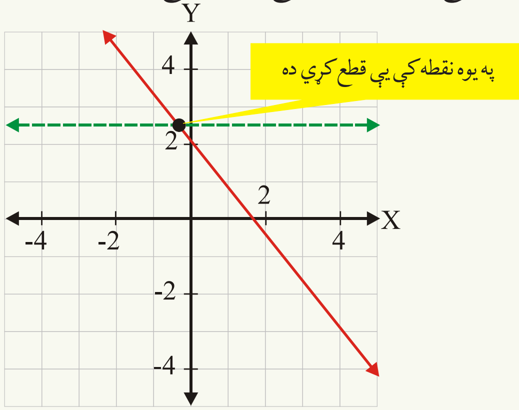
$f(3)=f(-3)$ لیکن $3 \neq -3$ نو $g(x)$ یو په یو تابع نه ده.

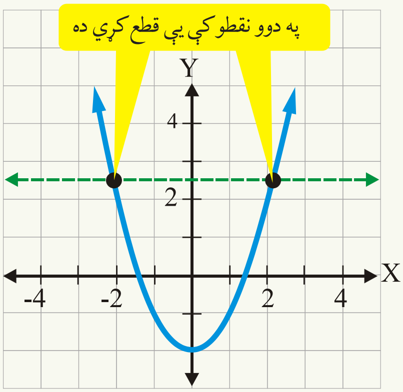
فعالیت

که $f(x)=3x+8$ او $g(x)=x^2$ وي، وښیاست چې کومه یوه تابع یو په یو تابع ده او کومه یوه تابع یو په یو تابع نه ده؟ ولې؟

د ګراف له مخې د يو په يو تابع پېژندنه: که يو افقي خط چې د x له محور سره موازي وي د تابع ګراف په يوه نقطه کې قطع کړي، دا يو په يو تابع ده، که افقي خط د تابع ګراف له يوې نقطې څخه په زياتو نقطو کې قطع کړي، نو دا ګراف د يو په يو تابع ګراف نه دی.

څلورم مثال: په راکړل شوو شکلونو کې ليدل کېږي چې د x له محور سره موازي خط لومړنۍ تابع ګراف په يوه نقطه کې او د دويمې تابع ګراف يې په دوو نقطو کې قطع کړی دی، نو لومړنۍ تابع يو په يو تابع ده، خو دويمه تابع يو په يو تابع نه ده.





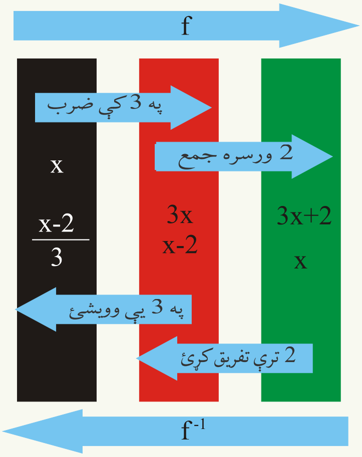
د معکوسي تابع تعريف: که f يوه يو په يو تابع وي چې د تعريف ساحه يې x او د قيمتونو ساحه يې y ده، نو د g تابع د f د تابع معکوسه تابع ده، که د g د تعريف ساحه y او د قيمتونو ساحه يې x وي او يا د g تابع په هغه صورت کې د f د تابع معکوسه ده که چېرې:

$$(f \circ g)(x) = x$$
$$(g \circ f)(x) = x$$
$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$$

پنځم مثال: که $f(x) = 3x + 2$ وي، د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع $f^{-1}(x)$ پيدا کړئ.

حل:

$$y = f(x) = 3x + 2$$
$$x = 3y + 2$$
$$3y = x - 2$$



$$y=\frac{x-2}{3}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x-2}{3}=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$$

$$f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$$

دا مثال په لنډ ډول په شکل کې هم ښودل شوی دی.

له بلې خواکه $f^{-1}(x)$ په $\mathrm{g(x)}=\dfrac{\mathrm{x}-2}{3}$ سره وښودل شي، $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)=x$ دی.

ځکه چې:

$$(f\,o\,g)(x)=3(\frac{x-2}{3})+2=x-2+2=x$$

$$(g\,o\,f)(x)=\frac{3x+2-2}{3}=\frac{3x}{3}=x$$

یا: $f^{-1}(f(x))=x$ او $f(f^{-1}(x))=x$

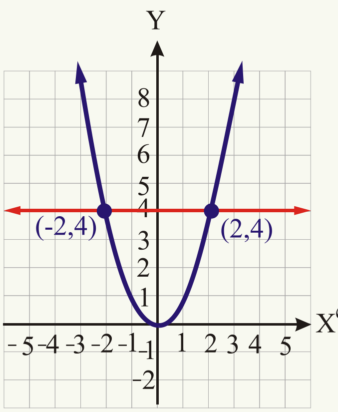
شپږم مثال: که $f(x)=x^3+1$ وي $\mathrm{f^{-1}(x)}$ اوکه $g(x)=x^2$ وي $g^{-1}(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$y=x^3+1$$

$$x=y^3+1 \qquad \Rightarrow y^3=x-1\Rightarrow y=\sqrt[3]{x-1}$$

که y په $f^{-1}(x)$ سره وښیو، نو $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$



$$\mathrm{g(x)=x^2\Rightarrow y=x^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{y}}$$

x پر y او y پر x بدلوو.

$$g^{-1}(x)=\pm\sqrt{x} \quad \text{یا} \quad y=\pm\sqrt{x}$$

لیدل کیږي چې $g^{-1}(x)$ یوه تابع نه ده، ځکه چې که $x=2$ او یا $x=-2$ وي، $g(-2)=4$ او $g(2)=4$ کیږي شکل وګورئ نو د g(x) تابع معکوس پذیره نه ده.

اووم مثال: د x دکوم قمیت لپاره د $f(x)=5x-2$ تابع له خپل معکوس سره مساوي کېږي؟

حل: که $y=5x-2$ وي، نو معکوس يې

$$x=5y-2\Rightarrow \qquad 5y=x+2$$

$$y=\frac{x+2}{5} \qquad f^{-1}(x)=\frac{x+2}{5}$$

$$\frac{x+2}{5}=5x-2\Rightarrow \quad 24x=12$$

$$x=\frac{1}{2}$$

نو د $x=\frac{1}{2}$ په قیمت سره د $f(x)$ تابع له خپلې معکوسې تابع سره مساوي کېږي.

اتم مثال: وښیاست چې د $f(x)=7x-2$ او $g(x)=\frac{1}{7}x+\frac{2}{7}$ تابعګاني يو د بل معکوسې تابع ګاني دي.

حل:

$$(f\,o\,g)(x)=f(g(x))=f(\frac{1}{7}x+\frac{2}{7})=7(\frac{1}{7}x+\frac{2}{7})-2=x$$

$$(g\,o\,f)(x)=f(g(x))=g(7x-2)=\frac{1}{7}(7x-2)+\frac{2}{7}=x$$

نو د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې يو د بل معکوسې تابعګاني دي، نو نتيجه کېږي چې د تابع او د تابع د معکوسې تابع ترکيب د عينيت $\left(f(x)=x\right)$ تابع ده.

فعالیت

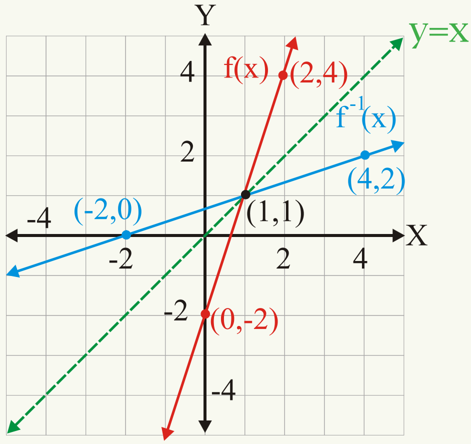
که $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$ وي، $f^{-1}(x)$ پیدا کړئ او هم وښیاست چې $(f\,o\,f^{-1})(x)=x$ کېږي.

د تابع او دهغې د معکوسې تابع ګراف: د $f(x)$ د يو په يو تابع او د هغې د معکوسی تابع $f^{-1}(x)$ د ګرافونو ترمنځ يوه رابطه موجوده ده، څکه که چېرې (a,b) د $f(x)$ تابع د ګراف پر مخ يوه نقطه وي، نو د (b,a) نقطه د $f^{-1}(x)$ تابع د ګراف پرمخ واقع ده چې (a,b) او (b,a) نقطې له نظره د $y=x$ خط ته سره متناظرې دي.

نهم مثال: که $f(x)=3x-2$ وي، نو ښکاره ده چې $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ د $f(x)$ معکوسه تابع ده. د دواړو تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کړئ چې ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.

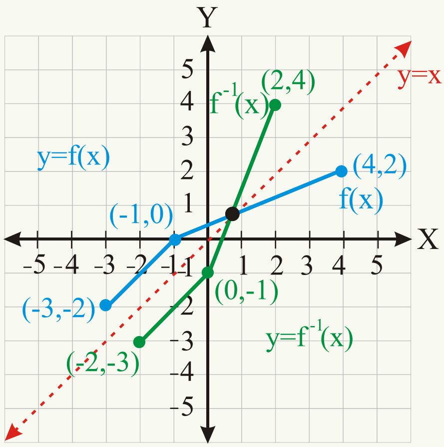
x	0	1	2
$f(x)$	-2	1	4

x	-2	1	4
$f^{-1}(x)$	0	1	2



لیدل کیږي چې د دواړو تابع ګانو ګرافونه نظر د y = x خط ته سره متناظر دي.

لسم مثال: که $f(x)$ د $(-3,-2),(-1,0)$ او $(4,2)$ مرتبو جوړو لرونکي وي د $f(x)$ او $f^{-1}(x)$ د تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړي او وښیاست چې دواړه ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.



لیدل کېږي چې د $f(x)$ او $f^{-1}(x)$ تابع ګانو ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.

- د یو په یو تابع معکوس هم یوه تابع ده.
- د X له محور سره موازي خط (افقي خط) د یو په یو تابع ګراف په یوه نقطه کې قطع کوي.
- د $y=f(x)$ تابع د معکوس د پیدا کولو لپاره د تابع معادله د x لپاره حلوو، بیا x پر y او y پر x بدلوو په لاس راغلې تابع $y=f^{-1}(x)$ ده چې د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع ده.
- د $f(x)$ د تابع او د $f(x)$ د معکوسې تابع ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.
- $dom\, f(x)=Range\, f^{-1}(x)$ او $Range\, f(x)=dom\, f^{-1}(x)$ دي.

پوښتنې

1- د لاندینیو تابع ګانو معکوس پیدا کړئ او ووایئ چې د کومې تابع معکوس هم یوه تابع ده؟

$$f=\{(-1,0),(-2,1),(4,3),(3,4)\} \quad h=\{(1,4),(2,3),(4,1)\}$$
$$g=\{(1,2),(2,3),(3,2),(4,1)\} \quad k=\{(3,0),(2,-1),(1,2),(0,1),(-1,2)\}$$

2 – د لاندینیو هرې یوې تابع معکوسه تابع پیدا کړئ او د خپل ځواب صحت د $f(f^{-1}(x))=x$ سره وازمایئ.

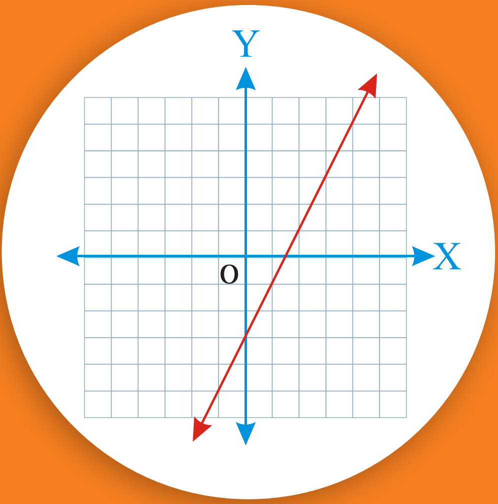
$$f(x)=x+3 \qquad f(x)=2x \qquad f(x)=2x+3$$
$$f(x)=x^3+2 \qquad f(x)=(x+2)^3 \qquad f(x)=\frac{1}{x}$$

3 – د لاندینیو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ او د X له محور سره د موازي خط (افقي خط) په واسطه وښیاست چې ددوی معکوس هم یوه تابع ده.

$$f(x)=1-x^2 \qquad g(x)=\frac{7-2x}{5}$$

4 – له لاندینیو تابع ګانو څخه کومه یوه یو په یو تابع ده.

$$y=4x-5 \qquad y=6-x \qquad y=(x-2)^2 \qquad y=9 \qquad y=\frac{1}{x+2}$$



پولينومي تابع ګاني

- آيا پوهيږي چې لومړۍ درجې تابع ته ولې خطي تابع وايي؟
- آيا د لومړۍ درجې تابع ګراف يو مستقيم خط دی؟

پولينومونه مو په لومړي فصل کې تر څېړنې لاندې ونيول. هغه پولينوم چې له يوه توري (متحول) څخه جوړ شوی وي د پولينومي تابع په نامه يادېږي.

خطي تابع (Liner function) يا لومړۍ درجه تابع

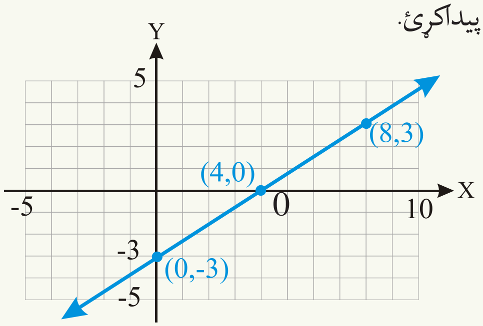
هغه پولينومي تابع ده چې درجه يې يوه وي، د لومړۍ درجې تابع عمومي شکل $f(x)=ax+b$ دی چې $a\neq 0$ او b , a حقيقي عددونه دي.

د مثال په ډول: $f(x)=3x+4$, $f(x)=x-1$, $f(x)=2x$ او $f(x)=\frac{1}{2}x$ خطي تابع ګانې دي.

لومړی مثال: د $f(x)=\frac{3}{4}x-3$ تابع ګراف رسم کړئ او د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع نقطې پيداکړئ.

$f(x)=\frac{3}{4}x-3$

x =	8	4	0
f(x)	3	0	−3



د X له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه (4 ,0) او د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه (0,−3) ده.

ليدل کېږي چې د لومړۍ درجې تابع ګراف يو مستقيم خط دى او له همدې سببه ورته خطي تابع هم وايي، د خطي تابع د ګراف د رسمولو لپاره همدومره کافي ده چې د X او Y له محورونو سره يې د تقاطع ټکي پيدا کړو او مستقيم خط رسم کړو، لکه: چې په شکل کې ليدل کېږي.

فعاليت

د $y = f(x) = x + 1$ او $y = x - 1$ تابع ګانو ګراف رسم او د X او Y له محورنو سره يې د تقاطع د نقطو وضعيه کميات هم پيدا کړئ.

دويم مثال: د $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ خطي تابع ګراف رسم کړئ.

حل: د Y له محور سره د ګراف د تقاطع په نقطه کې $(x = 0)$ دى، نو:

$$f(0) = \frac{2}{3}(0) + 2 = 2$$

نو د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه $(0, 2)$ ده.

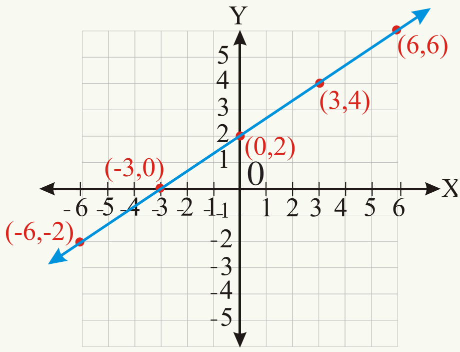
او د X له محور سره د ګراف د تقاطع په نقطه کې د y يا f (x) قيمت صفر دى $f(x) = 0$

$$0 = \frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow x = -3$$

نو د X له محور سره د ګراف د تقاطع ټکى $(-3, 0)$ دى.

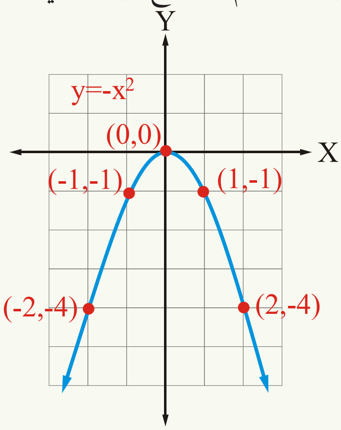
د $(0 , 2)$ او $(-3 , 0)$ نقطي يو له بله سره نښلوو او مستقيم خط رسموو او هم کولاى شو چې د ګراف يو څو نورې نقطي وټاکو چې پر همدې مستقيم خط باندې پرتې دي.

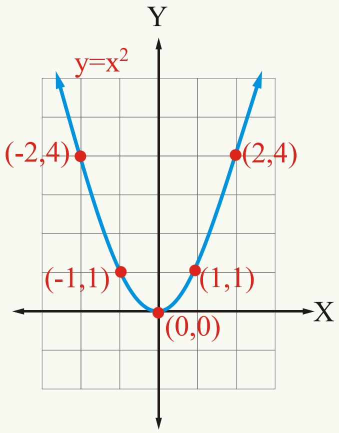
x =	0	3	−3	6	−6	...
f(x) =	2	4	0	6	−2	...



دويمه درجه تابع (Quadratic Function) او ګراف يې:

دا ګرافونه د کوم ډول تابع ګرافونه دي؟





- دا دواړه ګرافونه سره څه توپير لري؟
- له $f(x) = x^2 + 7x + 12$، $g(x) = x^2 + 1$، $h(x) = x^2 + 3x$، $k(x) = x^2$ او $r(x) = 2x - 1$ څخه کومه يوه يې دويمه درجه تابع نه ده؟

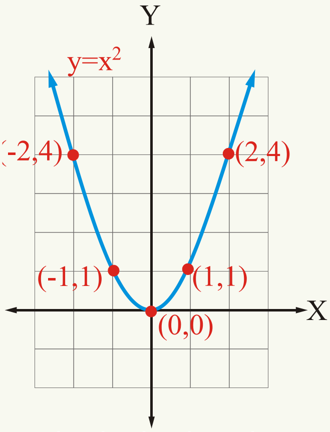
هغه پولينومي تابع چې درجه يې يوه وي، لومړی درجه يا د خطي تابع (Liner Function) په نامه يادېږي او که د پولينومي تابع درجه (2) وي، د دويمي درجې تابع په نوم يادېږي.

فعاليت

- د دويمي درجې تابع ګراف په کوم نوم يادېږي؟
- د دويمي درجې تابع د ګراف د تناظر محور کوم خط دی؟
- د دويمي درجې تابع ګراف څه وخت پورته خواته او کوم وخت ښکته خواته خلاصېږي؟
- د دويمي درجې تابع د ګراف رأس په کوم وخت کې اصغري (Minimum) او په کوم وخت کې اعظمي (Maximum) دی؟
- آيا د دويمي درجې تابع ګراف د رأس د نقطې وضعيه کميات پيدا کولای شي؟
- په کوم حالت کې د دويمي درجې تابع ګراف د X او Y محورونه قطع کولای شي؟
- آيا د X او Y له محورونو سره د دويمي درجې تابع د ګراف د تقاطع د نقطو وضعيه کميات پيدا

کولای شئ؟

د دویمې درجې تابع عمومي شکل $f(x)=ax^2+bx+c$ دی چې b ، a او c حقیقي عددونه او $a\neq 0$ دی.



x	0	1	2	−1	−2
y	0	1	4	1	4

د دویمې درجې تابع ګراف: ترټولو ساده دویمه درجه تابع د $f(x)=y=x^2$ تابع ده چې $a=1$ او $b=c=0$ که x ته یو څو قیمتونه ورکړل شي د تابع یا y اړونده قیمتونه لاس ته راوړلای شو، ګراف یې رسم کېدای شي لکه: څنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.

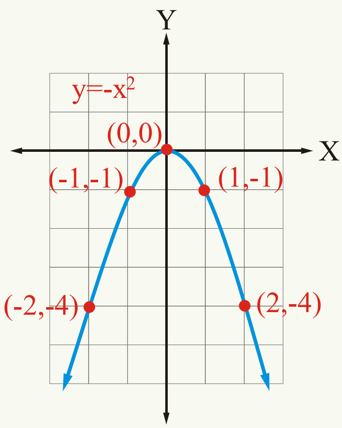
دویمې درجې تابع ګراف د پارابولا (Parabola) په نوم یادېږي چې داګراف نظر د y محور ته متناظر دی، هغه خط چې د پارابول له رأس څخه تېر شي او د y له محور سره موازي وي، د تناظر د محور په نامه یادېږي چې د y محور ددې تابع د ګراف د تناظر محور دی.

هغه نقطه چې د تناظر محور په کې ګراف قطع کوي، د پارابول د رأس (Vertex) په نامه یادېږي. که a>0 وي، د پارابول خوله پورته خواته خلاصېږي او د ګراف د رأس ټکی اصغري دی د $y=x^2$ د تابع ګراف د $(-\infty,0)$ په انټروال کې متناقص او د $(0,\infty)$ په انټروال کې ګراف متزاید دی.

لومړی مثال: د $y=-x^2$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

د پارابول خوله ښکته خواته خلاصېږي، ځکه چې $a<0$ دی، د $(-\infty,0)$ په انټروال کې ګراف متزاید او د $(0,\infty)$ په انټروال کې ګراف متناقص دی.



x	0	1	−1	2	−2
y	0	−1	−1	−4	−4

فعالیت

د $y = x^2 + 4$ تابع ګراف رسم کړئ.

دویم مثال: د $f(x) = x^2$ ، $g(x) = 2x^2$ او $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

$g(x) = 2x^2$

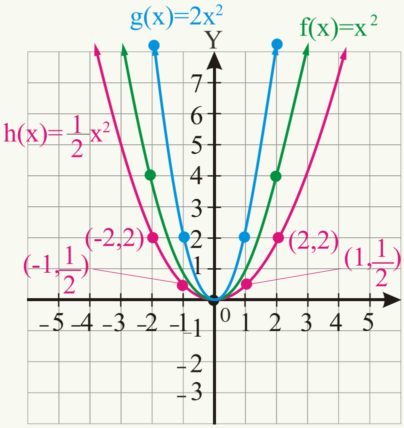
$x =$	0	1	-1	2	-2
$g(x) =$	0	2	2	8	8

$f(x) = x^2$

$x =$	0	1	-1	2	-2
$f(x) =$	0	1	1	4	4

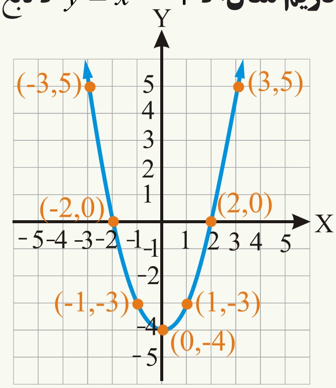
$h(x) = \frac{1}{2}x^2$

$x =$	0	1	-1	2	-2
$h(x) =$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	2



دریم مثال: د $y = x^2 - 4$ د تابع ګراف رسم کړئ.

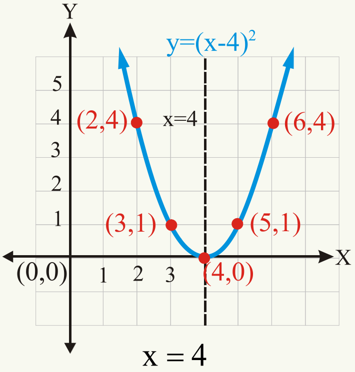
x	0	1	−1	2	−2	3	−3
y	−4	−3	−3	0	0	5	5



په حقیقت کې د $y = x^2$ تابع ګراف 4 واحده ښکته خواته نقل شوی دی.

څلورم مثال: د $y = (x-4)^2$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل: که x ته یو څو قیمتونه ورکړو او د y اړونده قیمتونه پیدا کړو د تابع ګراف رسمیدلای شي لکه:

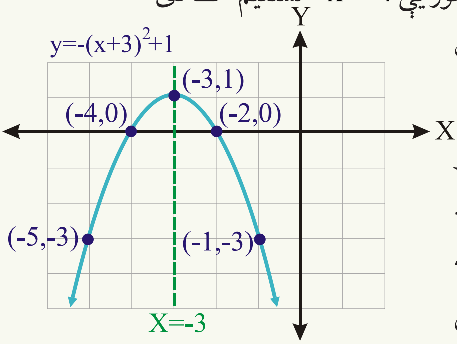


x	4	5	3	6	2	...
y	0	1	1	4	4	...

لیدل کېږي چې ګراف د $(-\infty\ ,\ 4)$ په انټروال کې متناقص او د $(4,\infty)$ په انټروال کې متزاید دی. له شکل څخه لیدل کېږي چې د $y=x^2$ ګراف په افقي ډول 4 واحده ښي خواته انتقال شوی دی د پارابول رأس د $(4\ ,0)$ ټکی دی او د تناظر محور یې $x=4$ مستقیم خط دی.

پنځم مثال: د $y=-(x+3)^2+1$ تابع ګراف رسم کړئ.

د $y=x^2$ ګراف درې واحده کیڼې خواته او یو واحد په عمودي ډول پورته خواته نقل شوی دی او د پارابول راس د $(-3,1)$ ټکی د ګراف اعظمي نقطه او د تناظر محور یې $x=-3$ دی چې په شکل کې هم لیدل کېږي.



x	-3	-2	-4	-5	-1
y	1	0	0	-3	-3

فعالیت

د $y=3x^2$ او $y=-3x^2$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع ټکي:

ددې لپاره چې په اسانۍ سره پارابول رسم کړو، د X او Y له محور سره یې د تقاطع ټکي پیدا کوو (که چېرې د X له محور سره تقاطع ولري)

د Y له محور سره د تقاطع ټکي پیداکولو لپاره د $y = ax^2 + bx + c$ معادله کې x=0 وضع کېږي په نتیجه کې y=c دی.

د X له محور سره د تقاطع د پیداکولو لپاره $y = 0$ وضع کوو، نو لرو چې:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$0 = ax^2 + bx + c \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

څرنګه چې پوهېږئ $ax^2 + bx + c = 0$ یوه دویمه درجه معادله ده او جذرونه یې $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ دی، پوهېږو چې ددې معادلې جذرونه هغه وخت حقیقي عددونه دي چې $b^2 - 4ac \geq 0$ وي، که $b^2 - 4ac < 0$ ګراف د X محور قطع کولای نه شي، په لنډ ډول یې په لاندې جدول کې وګورئ:

د $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ **تابع ګراف**

a	د دویمې درجې تابع ګراف په هغه صورت کې د X محور په دوو نقطو کې قطع کوي چې $b^2 - 4ac > 0$ وي.
b	په هغه صورت کې د X محور په یوه نقطه کې قطع کوي چې $b^2 - 4ac = 0$ وي.
c	په هغه صورت کې د X محور قطع کولای نه شي چې $b^2 - 4ac < 0$ وي.

د پارابولا د راس د نقطې د وضعیه کمیاتو پیدا کول:

د تکمیل مربع په طریقه هم کولای شو چې د پارابول د رأس د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړو.

$$y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

$$y = a\left[(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2\right] + c$$

$$= a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a(\frac{b^2}{4a^2}) + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

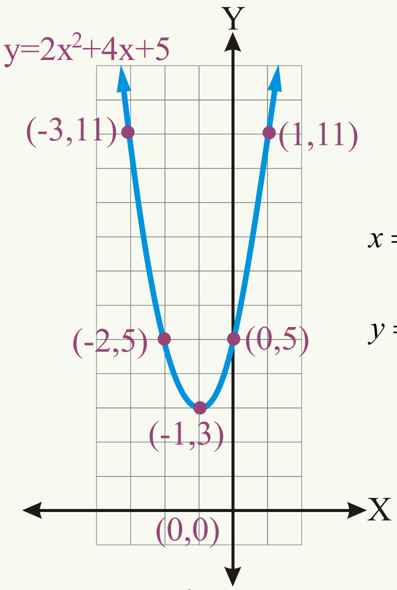
$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

د پارابولا د رأس د ټکي وضعیه کمیات $\left(-\frac{b}{2a}\ ,\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ او یا (h,k) دي او څرنګه چې
د تناظر محور د پارابولا له رأس څخه تیریږي، نو $x=-\frac{b}{2a}$ د تناظر د محور معادله ده.
که چېرې $a>0$ وي، رأس اصغري (Minimum) او که $a<0$ وي، رأس اعظمي (Maximum) دی.

شپږم مثال: د $f(x)=2x^2+4x+5$ تابع ګراف رسم کړئ.

1- د X له محور سره د تقاطع ټکي پیدا کوو. څرنګه چې $a=2$, $b=4$ او $c=5$ دی.
$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\cdot2\cdot5=-24<0$ ادا چې $\Delta<0$ ده نو ګراف د X محور نه قطع کوي.

2- د Y له محور سره د ګراف د تقاطع ټکي پیدا کوو په دې حالت کې $x=0$ دی.
د $y=ax^2+bx+c$ په تابع کې که $x=0$ شي $y=c$ کېږي، نو $(0,c)$ د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه ده. $f(0)=2\cdot0^2+4\cdot0+5=5$



نو په دې مثال کې $(0,5)$ د y له محور سره د تقاطع نقطه ده.

3 – د رأس د نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\cdot2}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot2\cdot5-4^2}{4\cdot2}=\frac{40-16}{8}=\frac{24}{8}=3$$

$(-1,3)$ د پارابولا د رأس د نقطې وضعیه کمیات دي او رأس اصغري دی، ځکه چې $a>0$ دی.

4 – د تناظر د محور معادله $x=-\frac{b}{2a}=\frac{-4}{4}=-1$
د ګراف د تناظر د محور معادله $x=-1$ ده، د ګراف د رسمولو لپاره کولای شو د ګراف یو څو نورې نقطې هم پیدا کړو:

$f(x)=2x^2+4x+5$

x =	−1	−2	0	1	−3
f(x) =	3	5	5	11	11

اووم مثال: د $y=-3x^2-2x+1$ تابع ګراف رسم کړئ.

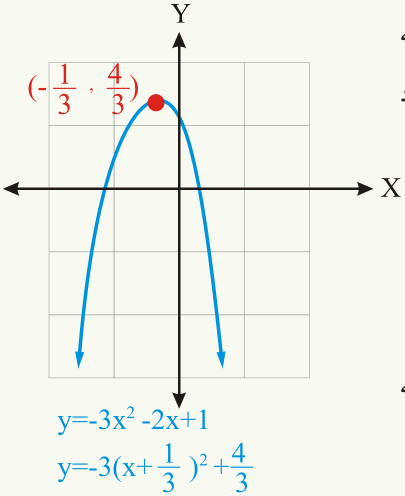
$$y=-3(x^2+\frac{2}{3}x)+1$$

د x د ضریب نیمايي مربع جمع او هم تفریقوو.

$$y=-3\left[x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2-(\frac{1}{3})^2\right]+1$$

$$y=-3\left[x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2\right]-3(-\frac{1}{9})+1=-3\left[(x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2\right]+\frac{4}{3}$$

$$y=-3(x+\frac{1}{3})^2+\frac{4}{3}$$



په نتیجه کې $x=-\frac{1}{3}$ د تناظر د محور معادله ده، ځکه چې : $x+\frac{1}{3}=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$ او $(-\frac{1}{3},\frac{4}{3})$ د رأس د ټکي وضعیه کمیات دي او څرنګه چې $a<0$ دی، نو د پارابولا رأس اعظمي دی.

يادونه: که دويمه درجه تابع د $y-k=a(x-h)^2$ یا $y=a(x-h)^2+k$ په شکل ولیکل شي $x=h$ د تناظر د محور معادله او (h,k) د رأس د نقطې وضعیه کمیات دي.

$f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$ د لومړی درجې یا خطي تابع عمومي شکل دی.

او $y=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$ د دويمې درجې معادلې عمومي شکل دی.

د دويمې درجې تابع ګراف ته پارابول (Parabola) وايي که $a>0$ وي، رأس اصغري او که $a<0$ وه، رأس اعظمي دی. $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ د پارابولا د رأس وضعیه کمیات او $x=-\frac{b}{2a}$ د پارابول د تناظر د محور معادله ده. که $\Delta=b^2-4ac>0$ پارابولا د X محور په دوو نقطو کې او که $\Delta=0$ نو پارابولا د x محور په یوه نقطه کې قطع کوي او که $\Delta<0$ وي، پارابولا د X محور قطع کولای نه شي.

پوښتنې

1 - د $h(x) = -\frac{3}{2}x + 3$ د تابع ګراف رسم کړئ.

2 – د $g(x) = 2x + 1$ او $g(x) = 2x - 1$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم

کې رسم او سره پرتله یې کړئ.

3–د $f(x) = x^2$, $f(x) = 2x^2$, $f(x) = 3x^2$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ او $f(x) = \frac{1}{3}x^2$

تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړئ او یو له بله سره یې پرتله کړئ

4 – د لاندې تابع ګانو د ګراف د تناظر محور معادلې پیدا کړئ.

$f(x) = 3x^2 - 2x + 6$ ، $f(x) = x^2 - 12x + 30$ ، $f(x) = x^2 + 8x + 13$

5 – د $f(x) = (x-2)^2$, $g(x) = (x+1)^2$ او $h(x) = (x-3)^2$ تابع ګانو ګرافونه رسم

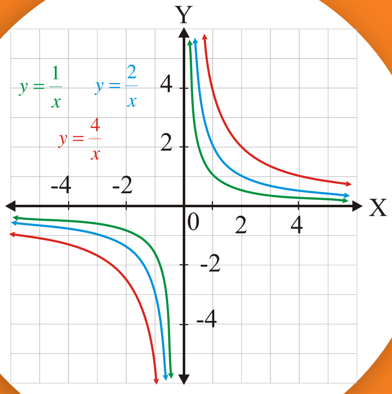
کړئ او ووایاست چې د $f(x) = x^2$ له ګراف سره څه اړیکه لري؟

6 – د $y = -x^2 - 1$ تابع د ګراف د راس وضعیه کمیات عبارت دي له:

a : $(-1, 1)$ b: $(1, -1)$ c: $(0, -1)$ d : $(0, 1)$

7 – د $y = (x-1)^2 - 2$ تابع د ګراف د راس وضعیه کمیات عبارت دي له:

a : $(1, 1)$ b: $(-1, 2)$ c: $(-1, -2)$ d : $(1, -2)$



ناطقي يا نسبتي تابع ګاني
(Rational functions)

دا شکل د کوم ډول تابع ګانو ګرافونه دي؟

فعاليت

- آیا د ناطقي تابع د عمودي مجانب معادله پيداکولای شئ ؟
- آیا د هري ناطقي تابع د تعريف په ساحه کي ټول حقيقي عددونه شامليدلای شي؟
- آیا د يوې ناطقي تابع افقي مجانب پيداکولای شئ؟
- آيا هره ناطقه تابع عمودي مجانب لري؟

تعريف

ناطقه تابع هغه تابع ده چي د دوو پولينومي تابع ګانو له خارج قسمت څخه جوړه شوي وي که $f(x)=\dfrac{p(x)}{g(x)}$، $g(x)\neq 0$ وي، په داسي حال کي چي $p(x)$ او $g(x)$ پولينومونه وي، نو $f(x)$ يوه ناطقه تابع ده.

د ناطقـي تابـع د تعريـف ســاحه ټـول حقيقـي عددونه دي، پرتـه د x لـه هغو قيمتونـو څخه چي د ناطقـي تابـع مخـرج پـري صفـر کيـږي، د مثال پـه ډول: $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ، $h(x)=\dfrac{x^3-1}{x}$
$g(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x-6}$ ، $g(x)=3$ او $P(x)=2x^2-3$ ناطقي تابع ګاني دي.

فعاليت

آيا $k(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x+2}$ يوه ناطقه تابع ده؟ ولي ؟

د ناطقي تابع د تعریف د ساحې پیدا کول

(Finding Domain of Rational function)

لومړی مثال: د لاندېنیوناطقو تابع ګانو د هرې یوې د تعریف ساحه پیدا کړئ.

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{x^2-9} \quad , \quad h(x)=\frac{x+3}{x^2+9}$$

حل: د $f(x)$ په تابع کې د $x=3$ لپاره د تابع مخرج صفر کېږي، نو د 3 عدد د $f(x)$ د ناطقې تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی یا: $Dom\ f(x)=\{x/x\in IR \ , \ x\neq 3\}$

د $g(x)$ په تابع کې که چېرې $x=3$ یا $x=-3$ شي، نو مخرج یې صفر کېږي، نو د 3 او 3 - عددونه د $g(x)$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دي.

$$Dom\ g(x)=\{x/x\in IR \ , \ x\neq 3 \ , \ x\neq -3\}$$

څرنګه چې د $h(x)$ تابع مخرج د x په هیڅ قیمت نه صفر کېږي، نو د $h(x)$ تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

$$Dom\ h(x)=IR \quad \text{یا} \quad Dom\ h(x)=(-\infty \ , \ \infty)$$

فعالیت

د لاندېنیو ناطقو تابع ګانو د تعریف ساحې تعین کړئ.

$$f(x)=\frac{x^2-25}{x-5} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{x^2-25} \quad , \quad h(x)=\frac{x+5}{x^2+25}$$

دویم مثال: د لاندېنیو ناطقو تابع ګانو د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا کړئ.

$$f(x)=\frac{x+3}{x-4} \qquad g(x)=\frac{x-3}{x+5}$$

حل: د $f(x)$ تابع د تعریف ساحه پرته له (4) څخه ټول حقیقي عددونه دي.

$dom\ f(x) = IR \setminus \{4\}$ یا $IR - \{4\}$

$y = f(x) = \dfrac{x+3}{x-4} \Rightarrow y(x-4) = x+3$

$xy - x = 4y + 3$

$(y-1)x = 4y + 3$

$xy - 4y = x + 3 \Rightarrow \quad x = \dfrac{4y+3}{y-1}$

$Range\ f(x) = IR \setminus \{1\}$ یا $IR - \{1\}$

د g (x) تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، پرته له (-5) څخه:

$\text{dom}\, g(x) = IR - \{-5\}$ یا $\{x \in IR / x \neq -5\}$

$g(x) = y = \dfrac{x-3}{x+5} \Rightarrow y(x+5) = x-3 \Rightarrow xy + 5y = x - 3$

$x = \dfrac{-5y-3}{y-1}$ $\qquad$ $\text{Range}\, g(x) = IR - \{1\}$ یا $\{y \in IR / y \neq 1\}$

فعالیت

د لاندې راکړل شوو ناطقو تابع ګانو د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا کړئ.

$h(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $k(x) = \dfrac{x+1}{3}$, $r(x) = \dfrac{4x-1}{2-x}$, $m(x) = \dfrac{x}{3x-2}$

د ناطقي تابع د ګراف رسمول (Graphing Rational function):

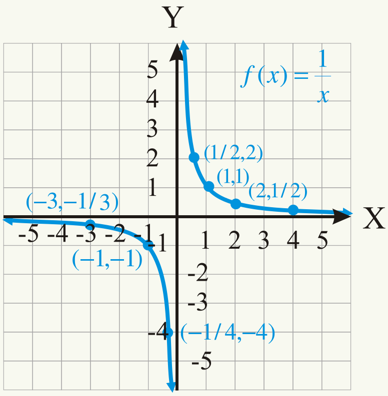
دریم مثال: د $f(x) = \dfrac{1}{x}$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل: که $x = 0$ شي، نو د تابع مخرج صفر کېږي، صفر د $f(x)$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی.

$Dom\ f = IR - \{0\}$

x	$\ldots -4$	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$4\ldots$
f(x)	$\ldots -\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}\ldots$

اوس د $f(x)=\frac{1}{x}$ د تابع وضعیت مطالعه کوو:



څرنګه چې $x=0$ د $f(x)$ تابع د تعریف په ناحیه کې شامل نه دی، ددې تابع د ګراف د رسمولو لپاره x ته داسې قیمتونه ورکوو چې له دواړو خواوو څخه صفر ته نژدې شي (تقرب وکړي)، که x له کیڼې خوا څخه صفر ته نژدې شي $(x\to 0^-)$ د تابع قیمت $-\infty$ ته نږدې کېږي $(f(x)\to-\infty)$ او که x له ښي خوا څخه صفر ته نژدې کېږي، $(x\to 0^+)$ د تابع قیمت $+\infty$ ته تقرب کوي $(f(x)\to\infty)$ لاندې جدول وګورئ.

a: x له کیڼې خوا څخه صفر ته نژدې کېږي.

x	...−1	−0.5	−0.1	−0.01	−0.001	$x\to 0^-$
$f(x)=\frac{1}{x}$	...−1	−2	−10	−100	−1000	$f(x)\to-\infty$

b: x له ښي خوا څخه صفر ته نژدې کېږي.

x	$0^+\leftarrow x$	0.001	0.01	0.1	0.5	1...
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\infty\leftarrow f(x)$	1000	100	10	2	1...

عمودي مجانب (Vertical Asymptotes)

که په یوه ناطقه تابع $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ کې چې صورت او مخرج یې مشترک فکتور، ونه لري او $p(a)\neq 0$ وي، که $g(a)=0$ شي، نو د $x=a$ خط د $f(x)$ د تابع عمودي مجانب دی چې د y له محور سره موازي دی. د عمودي مجانبونو شمېر د مخرج د جذرونو له شمېر سره مساوي دي یا په بل عبارت که $x\to a$ په نتیجه کې $f(x)\to+\infty$ یا $f(x)\to-\infty$، نو د $x=a$ عمودي خط ددې تابع عمودي مجانب دی یا که:

$x\to a\Rightarrow|f(x)|\to\infty$ نو $x=a$ د تابع عمودي مجانب دی.

x هر څومره چې د a قیمت ته نژدې شي، خو د تابع ګراف د $x = a$ مستقیم خط قطع کولای نه شي، ځکه چې د a عدد د تابع دتعریف په ساحه کې شامل نه دی، لکه: د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع د تعریف په ساحه کې صفر شامل نه دی، نو $x = 0$ یا د Y محور د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع عمودي مجانب دی.

څلورم مثال: د $f(x) = \frac{2x}{x-3}$، $g(x) = \frac{x}{x^2-25}$ او $h(x) = \frac{x+5}{x^2+25}$ تابع ګانو عمودي مجانبونه پیدا کړئ.

حل:

1 - د f(x) تابع د عمودي مجانب د پیداکولو لپاره د x هغه قیمت پیداکوو چې د f(x) تابع مخرج پرې صفر کېږي. نو د 3 عدد د $f(x)$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی.

$$domf(x) = \{x / x \in IR \ , \ \ x \neq 3\}$$

نو د $x = 3$ خط د f(x) تابع عمودي مجانب دی.

2 -

$$g(x) = \frac{x}{x^2-25} = \frac{x}{(x-5)(x+5)}$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$$

د x=5 او $x = -5$ لپاره د g(x) تابع مخرج صفر کېږي، نو د 5 او 5 - عددونه د g(x) د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دي.

$$dom\,g(x) = \{x / \in IR \ , \ \ x \neq -5 \ , \ \ x \neq 5\}$$

نو د $g(x)$ د تابع عمودي مجانبونه د $x = 5$ او $x = -5$ خطونه دي.

3 - څرنګه چې د x په هر قیمت د $h(x) = \frac{x+5}{x^2+25}$ تابع مخرج نه صفر کېږي، نو عمودي مجانب نه لري یا ددې تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

افقي مجانب (Horizontal Asymptote)

که په یوه ناطقه تابع کې د صورت او مخرج درجې سره مساوي وي، نو ښکاره خبره ده چې دوېش

حاصل (خارج قسمت) به یو ثابت عدد وي، که دې ثابت عدد ته b ووایو، نو د $y=b$ افقي خط ددې تابع افقي مجانب دی چې دا خط یا د X محور او یا د X له محور سره موازي خط دی چې په حقیقت کې د b عدد د صورت او مخرج د لویو توانونو د ضریبونو له نسبت څخه عبارت دی او یا صورت پر مخرج وېشو.

د مثال په ډول د $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$ د تابع افقي مجانب د $y=2$ خط دی.

افقي مجانب داسې تعریفوو:

که $x\to\infty$ یا $x\to-\infty$ او په نتیجه کې $f(x)\to b$ نو $y=b$ مستقیم خط د f(x) تابع افقي مجانب دی او یا که $|x|\to\infty$ او $y\to b$، نو $y=b$ مستقیم خط ددې تابع افقي مجانب دی.

پنځم مثال: د $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ تابع گراف رسم کړئ.

حل:

1 - **د X له محور سره د گراف د تقاطع نقطه**: د X له محور سره د تقاطع په نقطه کې $f(x)=0$ کېږي، په نتیجه کې لرو چې: $0=\dfrac{2x}{x-1}\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$

نو د تابع گراف د X محور په $x=0$ یا د $(0,0)$ په نقطه کې قطع کوي.

2 - **د Y له محور سره د گراف د تقاطع نقطه**: $f(0)=\dfrac{2\cdot 0}{0-1}=\dfrac{0}{-1}=0$

نو گراف د X او Y محورونه د $(0,0)$ په نقطه کې قطع کوي یا په بل عبارت ددې تابع گراف د وضیعه کمیاتو له مبدأ څخه تېرېږي.

3 - د تابع د عمودي مجانب معادله: $x-1=0\Rightarrow x=1$ دی دا خط رسم کړئ.

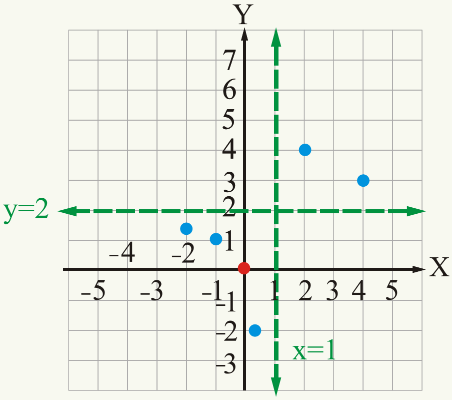
4 - د تابع د گراف افقي مجانب $\dfrac{2}{1}=2$ دی، نو $y=f(x)=2$ د تابع افقي مجانب دی، یا $\dfrac{2\text{x}}{\text{x}-1}=2+\dfrac{2}{\text{x}-1}$ افقي مجانب یې هم رسم کړئ.

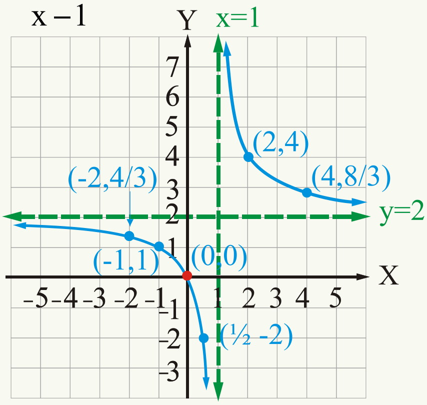
5 - د گراف یو څو نورې نقطې هم پیدا کوو، لکه:

x	0	-2	-1	$\frac{1}{2}$	2	4
$y=f(x)$	0	$\frac{4}{3}$	1	-2	4	$\frac{8}{3}$

له محورونو سره د تقاطع نقطې پاکو، د تابع مجانبونه رسموو او بیا یې ګراف، لکه: څنګه چې په شکل کې لیدل کېږي، رسموو.

$$f(x)=\frac{2x}{x-1}$$





فعالیت

د $f(x)=\frac{3x}{x-2}$ تابع ګراف رسم کړئ.

شپږم مثال: د $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$ د تابع افقي او عمودي مجانبونه پیدا کړئ او ګراف یې رسم کړئ.

حل: د عمودي او افقي مجانبونو معادلې عبارت دي له:

1 - د عمودي مجانب معادله $x=2$

2 - د افقي مجانب معادله $f(x)=y=1$

3 - د Y له محور سره تقاطع:

که $x=0$ شي، نو $f(x)=-1$ دي، ګراف د Y محور په $(0,-1)$ کې قطع کوي.

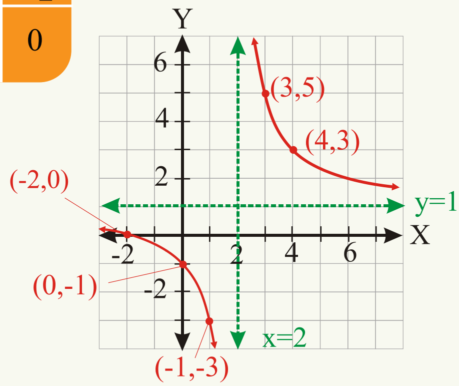
4 - د X له محور سره تقاطع $f(x)=0$ شي، نو:

$$x+2=0$$
$$x=-2$$

نو د $(-2,0)$ په نقطه کې ګراف د X محور قطع کوي.

5 - ددې لپاره چې ګراف په اسانه ډول رسم شي، په لاندې جدول کې د ګراف د هرې خانګې قیمتونه وګورئ.

x	−1	0	1	3	4	5	−2
f(x)	$-\frac{1}{3}$	−1	−3	5	3	$2\frac{1}{3}$	0



که صورت پر مخرج وویشو $\frac{x+2}{x-2}=1+\frac{4}{x-2}$

په حقیقت کې د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع ګراف د یو واحد په اندازه پورته خواته او د (2) واحدونو په اندازه ښي خواته انتقال شوی دی او $y=f(x)=1$ د تابع افقي مجانب دی.

مایل مجانب: (slant or Oblique asymptote)

څه وخت چې د یوې ناطقې تابع د صورت درجه د یو په اندازه د مخرج له درجې څخه زیاته وي ښکاره خبره ده چې تابع افقي مجانب نه لري په دې حالت کې تابع مایل مجانب لري.

اووم مثال: د $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

1 - د مایل مجانب د پیدا کولو لپاره صورت پر مخرج وېشو، نو لرو چې:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}=\underbrace{x+1}_{\text{مایل مجانب}}+\frac{2}{x-1}$$

که $|x|$ هر څومره لوی شي $\frac{2}{x-1}$ صفر ته نژدې کېږي، نو په نتیجه کې ګراف د $y=f(x)=x+1$ مستقیم خط ته نژدې کېږي چې همدا د $y=x+1$ خط د $f(x)$ تابع مایل مجانب دی.

2 – د Y له محور سره یې د تقاطع نقطه:

$$f(0) = 0 + 1 + \frac{2}{0-1} = 1 - 2 = -1$$

ګراف د $(0,-1)$ په نقطه کې د Y محور قطع کوي.

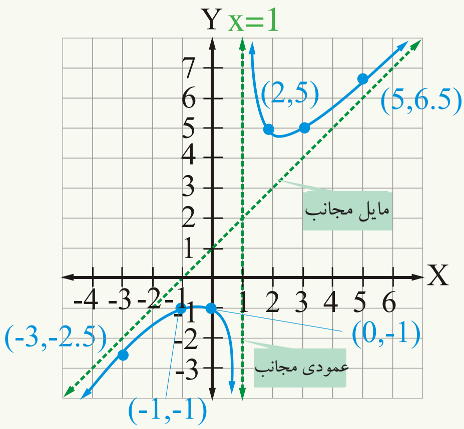
3 - ښکاره خبره ده چې ګراف د X محور قطع کولای نه شي، ځکه چې $x = \sqrt{-1}$ کېږي.

4 - عمودي مجانب يې

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ دی.

5 - ښکاره ده چې افقي مجانب نه لري.

6 - يو څو نورې نقطې پيدا کوو او د تابع ګراف رسموو:



x	2	3	5	−1	−3
f(x)	5	5	6.5	−1	−2.5

اتم مثال: د $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$ تابع ګراف رسم کړئ.

1 - د تابع عمودي مجانب د x = 2 خط دی، ځکه چې $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

2 - x^2+1 پر $(x-2)$ ويشو لرو چې: $\frac{x^2+1}{x-2} = x + 2 + \frac{5}{x-2}$

که $|x|$ لوی شي $\frac{5}{x-2}$ صفر ته نږدې کېږي او د تابع ګراف د $y = x + 2$ خط ته نژدې کېږي

چې $y = x + 2$ خط ددې تابع مايل مجانب دی.

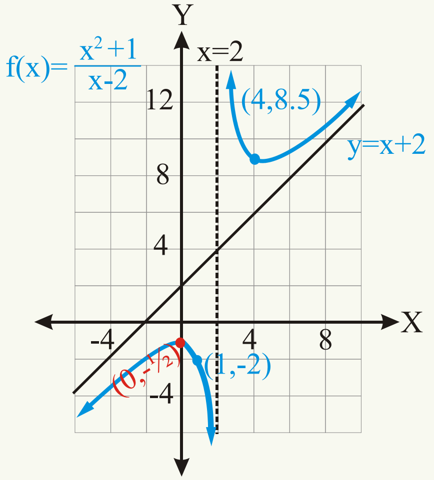
3 – د Y له محور سره تقاطع $-\frac{1}{2}$ ده، ځکه که $x = 0$ شي $f(0) = \frac{0+1}{0-2} = -\frac{1}{2}$

4 – ګراف د X له محور سره تقاطع نه لري، ځکه چې که $f(x) = 0$ شي، نو: $0 = \frac{x^2+1}{x-2}$

(چې په حقیقي عددونو کې تعریف شوی نه دی) $x^2+1=0 \Rightarrow x=\sqrt{-1}$

د مجانبونو په رسمولو او د Y له محور سره د تقاطع ټکی او څو نورو قیمتونو په مرسته د تابع ګراف رسمولای شو.

x	0	1	4
f(x)	$-\frac{1}{2}$	-2	8.5



که $f(x)=\dfrac{P(x)}{g(x)}$ په تابع کې په ترتیب سره m او n د صورت او مخرج درجې وي نو:

1 – که $m<n$ وي د x محور افقي مجانب دی.

2 – که $m=n$ وي $y=b$ د تابع افقي مجانب دی چې b د m او n درجو حدونو د ضریبونو نسبت دی یا که چیرې $f(x)=\dfrac{a_n x^n+\ldots+a_0}{b_n x^n+\ldots+b_0}$، $(b_n\neq 0)$ وي، نو $y=\dfrac{a_n}{b_n}$ د f(x) تابع افقي مجانب دی.

3 – که $m>n$ وي، نو افقي مجانب نه لري.

4 – که د صورت درجه د یو په اندازه د مخرج له درجې څخه زیاته وي، نو د تابع ګراف مایل مجانب لري چې په بې نهایت کې له ګراف سره موازي کیږي، یوه ناطقه تابع یو یا څو عمودي مجانبونه درلودلای شي، خو یو افقي یا مایل مجانب به لري.

پوښتنې

1 – د $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2-4}$ تابع افقي او عمودي مجانبونه پیدا کړئ.

2 – آیا د $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+1}$ تابع عمودي مجانب لري؟ ولې؟

3 – د لاندې راکړل شوو تابع ګانو د تعریف ساحې پیدا کړئ او د عمودي مجانبونو معادلې یې ولیکئ.

$$f(x)=\frac{5x}{x-4}\ ,\ g(x)=\frac{3x^2}{(x-5)(x+4)}\ ,\ h(x)=\frac{x+7}{x^2-49}\ ,\ k(x)=\frac{x+7}{x^2+49}$$

4 – له لاندې تابع ګانو څخه کومه یوه چې عمودي مجانب ولري، پیدا یې کړئ.

$$f(x)=\frac{x}{x+4}\quad ,\quad g(x)=\frac{x+3}{x(x+4)}$$

$$h(x)=\frac{x}{x(x+4)}\quad ,\quad k(x)=\frac{x}{x^2+4}$$

5 – د لاندې ناطقو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

$$f(x)=\frac{4x}{x-2}\quad ,\quad g(x)=\frac{2x}{x-4}$$

6 - د $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}$ تابع افقي مجانب عبارت دی له:

$a:\quad y=2$ $\qquad b:\quad y=3$

$c:\quad y=-2$ $\qquad d:\quad y=-3$

7 - د $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ او $f(x)=\dfrac{3}{x+2}$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ او د $f(x)=\dfrac{1}{x}$ د تابع له ګراف سره یې پرتله کړئ.

8 - د $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ تابع مایل مجانب پیدا کړئ.

د څپرکي لنډيز

• تابع د دوو سټونو تر منځ داسې يوه رابطه يا قاعده (Rule) ده چې د لومړني سټ هر عنصر يوازې او يوازې د دويم سټ له يو عنصر سره اړيکه ولري. لومړني سټ ته د تابع د تعريف ساحه (Domain) او دويم سټ ته د قيمتونو ساحه(Range) وايي يا تابع د هغو مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر يې تکرار شوي نه وي.

• يوه تابع د $y = f(x)$ په شکل ليکل کېږي، په يوه نقطه کې د تابع د قيمت د پيدا کولو لپاره د x راکړل شوی قيمت د تابع په معادله کې وضع کوو، د تابع قيمت په هغه نقطه کې په لاس راځي او يوه معادله هغه وخت د يوې تابع ښودونکې وي چې د هر x لپاره يو y وجود ولري.

• د يوې تابع د تعريف په ساحه (Domain) کې هغه عددونه شامل وي چې تابع په کې تعريف شوې وي يا د تابع قيمت يو حقيقي عدد وي. د يوې تابع ګراف د XOY په مستوي کې د S د هغو نقطو سټ دی په دې ډول چې $S = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$ او x د تابع د تعريف په ساحه کې شامل وي، که د y له محور سره موازي خط ګراف يوازې په يوه نقطه کې قطع کړي، دا ګراف د يوې تابع ګراف دی.

• $f(x) = c$ ثابته تابع، $f(x) = ax + b$ خطي تابع، $(a \neq 0)$, $f(x) = x$ د عينيت تابع او $f(x) = |x|$ د مطلقه قيمت تابع ده چې د تعريف ساحه يې ټول حقيقي عددونه او د قيمتونو ساحه يې صفر او مثبت حقيقي عددونه دي.

• د علامې تابع دا ډول تعريف شوې ده:

$$f : IR \to IR \qquad sgn(x) = \begin{cases} 1 : x > 0 \\ 0 : x = 0 \\ -1 : x < 0 \end{cases}$$

ددې تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه او د قيمتونو ساحه يې $\{-1, 0, 1\}$ ده.

• د دويمې درجې تابع عمومي شکل $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ دی او د دويمې درجې تابع ګراف ته پارابولا (parabola) وايي که $a > 0$ وي، رأس اصغري او که $a < 0$ وي، رأس اعظمي دی. $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ د پارابولا د رأس وضعيه کميات او $x = -\frac{b}{2a}$ د پارابول د تناظر د

محور معادله ده. که $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ پارابولا د X محور په دوو نقطو کې او که $\Delta = 0$ ، نو پارابولا د x محور په یوه نقطه کې قطع کوي او که $\Delta < 0$ ، وي پارابول د x محور نه قطع کوي.

- که د $f(x)$ په تابع کې $x_1 < x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) < f(x_2)$ شي، تابع متزایده، که $x_1 < x_2$ وي او $f(x_1) > f(x_2)$ شي، تابع متناقصه ده او هم که $f(-x) = f(x)$ وي، تابع جفته او که $f(-x) = -f(x)$ شي، تابع طاقه ده.
- انتقال په (2) ډوله دی (عمودي او افقي انتقال)
- **عمودي انتقال**: که c یو مثبت عدد وي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول پورته خواته انتقال شي د $y = f(x) + c$ تابع گراف لاس ته راځي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال شي، د $y = f(x) - c$ تابع گراف لاس ته راځي.

افقي انتقال: که c یو مثبت عدد وي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه کیڼې خواته انتقال شي، د $y = f(x+c)$ گراف لاس ته راځي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه ښي خواته انتقال شي، د $y = f(x-c)$ تابع گراف لاس ته راځي.

- د تابع گانو عملیې په لاندې ډول تعریف شوي دي:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

$$\mathrm{dom}(f+g)(x) = \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g$$
$$\mathrm{dom}(f-g)(x) = \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g$$
$$\mathrm{dom}(f \cdot g)(x) = \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g$$
$$\mathrm{dom}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g - \{x / g(x) = 0\}$$

• د مرکبو تابع ګانو د تعریف ساحه:

$$Dom(fog)(x) = \{x / x \in domg \quad , \quad g(x) \in domf\}$$
$$Dom(gof)(x) = \{x / x \in domf \quad , \quad f(x) \in domg\}$$

• د یو په یو تابع معکوس هم یوه تابع ده.

• د X له محور سره موازي خط (افقي خط) د یو په یو تابع ګراف په یوه نقطه کې قطع کوي.

• د $y = f(x)$ یو په یو تابع د معکوس د پیدا کولو لپاره معادله د x لپاره حلوو، بیا x پر y او y پر x بدلوو په لاس راغلی تابع $f^{-1}(x)$ ده چې د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع ده. د f(x) او د f(x) د معکوسې تابع ګرافونه نظر د y=x خط ته سره متناظر دي.

• که د $f(x) = \dfrac{P(x)}{g(x)}$ په ناطقه تابع کې په ترتیب سره m او n عددونه د صورت او مخرج درجې وي، نو:

1 – که $m < n$ وي، د X محور افقي مجانب دی.

2 – که $m = n$ وي، $y = b$ د تابع افقي مجانب دی چې b د m او n درجو لرونکو حدونو د ضریبونو نسبت دی یا که چېرې $f(x) = \dfrac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_0}$ وي، $(b_n \neq 0)$ نو $y = \dfrac{a_n}{b_n}$ د f (x) د تابع افقي مجانب دی.

3 – که $m > n$ وي، نو افقي مجانب نه لري.

4 – که د صورت درجه د یو په اندازه د f(x) د مخرج له درجې څخه زیاته وي، نو تابع مایل مجانب لري.

• یوه ناطقه تابع یو یا څو عمودي مجانبونه درلودلای شي، خو یو افقي یا مایل مجانب به لري.

د څپرکي پوښتنې

1 - د لاندېنیو مرتبو جوړو له ستونو څخه کوم یو یې د یوې تابع ښودونکې دی؟ د تعریف او د قیمتونو ساحې یې پیدا کړئ.

$1-\quad \{(1,2),(3,4),(5,5)\}$

$2-\quad \{(3,4),(3,5),(4,4),(4,5)\}$

$3-\quad \{(-3,-3),(-2,-2),(-1,-1),(0,0)\}$

$4-\quad \{(1,4),(1,5),(1,6)\}$

2 - که $g(x)=x^2+2x+3$ وي، $g(-x),g(-1)$ او $g(x+5)$ پیدا کړئ.

3 - که $h(x)=x^4+x^2+1$ وي، $h(-x),h(-1),h(2)$ او $h(3a)$ پیدا کړئ.

4 - د لاندېنیو تابع ګانو دتعریف ساحې پیدا کړئ.

$f(x)=2x \qquad f(x)=(x-3)^{\frac{1}{2}}$

$f(x)=\sqrt{16-x^2} \qquad f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$

$f(x)=\sqrt{\dfrac{3}{x^2+25}} \qquad f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$

5 - که چېرې $f(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x<0 \\ 4x+7 & : \quad x\geq 0 \end{cases}$ وي، $f(0),f(3)$ او $f(-2)$ پیدا کړئ.

6 - که چېرې $g(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x\geq -3 \\ -(x+3) & : \quad x<-3 \end{cases}$ وي، $g(-6),g(0)$ او $g(-3)$ پیدا کړئ.

7- که چېرې $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \Leftarrow \quad x\neq 3 \\ 6 & \Leftarrow \quad x=3 \end{cases}$ وي، $h(0),h(3)$ او $h(5)$ پیدا کړئ.

8 - له لاندېنیو معادلو څخه کومه یوه یې تابع تعریفوي؟

$x+y=16 \qquad x^2+y=16 \qquad x^2+y^2=16$

$x=y^2 \qquad y=\sqrt{x+4} \qquad x+y^3=8$

9 - په لاندېنيو تابع گانو کې کومه طاقه، کومه يوه جفته او کومه يوه، نه طاقه او نه جفته ده؟

$$f(x)=x^4-2x^2+5 \quad , \quad f(x)=x^2+2x-1 \quad . \quad f(x)=\frac{2}{x-6}$$

10 - د $f(x)=(x-1)^2, f(x)=x^2-1$ تابع گانو گرافونه رسم او د $f(x)=x^2$ سره يې پرتله کړئ.

11 - د لاندېنيو تابع گانو $(f+g),(f-g),(f\cdot g)$ او $(\frac{f}{g})$ پيدا کړئ او د تعريف ساحې يې وټاکئ.

$f(x)=4x-1 \qquad g(x)=6x+3$

$f(x)=\sqrt{2x+5} \qquad g(x)=\sqrt{4x-9}$

$f(x)=4x^2-11x+2 \qquad g(x)=x^2+5$

12 - که $f(x)=4x^2-2x$ او $g(x)=8x+1$ وي، نو:

$(f+g)(3) \qquad (f+g)(-5) \qquad (f\cdot g)(4)$

$(\frac{f}{g})(4) \qquad (fog)(2) \qquad (gof)(-5)$

پيدا کړئ.

13 - fog او gof پيدا کړئ که:

$f(x)=8x+12 \qquad g(x)=3x-1$

$f(x)=5x+3 \qquad g(x)=-x^2+4x+3$

$f(x)=-x^3+2 \qquad g(x)=4x$

$f(x)=\frac{1}{x} \qquad g(x)=x^2$

$f(x)=\sqrt{x+2} \qquad g(x)=8x^2-6$

14 - د y=f(x) تابع د گراف په پام کې نيولو سره ووایاست چې د $y=f(x)-5$ تابع گراف د 5 واحدو په اندازه:

a- ښکته خواته انتقال شوي دی. b- پورته خوا ته انتقال شوي دی.

c- ښې خواته انتقال شوي دی. d- کيڼې خواته انتقال شوي دی.

15 - که د f(x) تابع په لاندې ډول تعريف شوی وي گراف يې رسم کړئ، د تعريف او قيمتونو

ساحې يې وټاکئ.

$$f(x)=\begin{cases} -x+2 & : \quad x>1 \\ x^2 & : \quad -1<x<1 \\ x+2 & : \quad x<-1 \end{cases}$$

16 - د $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ تابع د تعریف او قیمتونو ساحې وټاکئ.

17 - د $f(x)=\sqrt{2x-1}$ تابع د تعریف او قیمتونو ساحې وټاکئ.

18 - د لاندېنيو ناطقو تابع ګانو د تعریف ساحې پیدا کړئ او کومه تابع چې عمودي مجانب ولري، د عمودي مجانبونو معادلې یې هم پیدا کړي.

$f(x)=\frac{5x}{x-4}$ $\qquad g(x)=\frac{7x}{x-8}$ $\qquad h(x)=\frac{x+8}{x^2-64}$

$f(x)=\frac{x+8}{x^2+64}$ $\qquad g(x)=\frac{x+7}{x^2-49}$ $\qquad h(x)=\frac{x+7}{x^2-36}$

19 - د $f(x)=x^2+2$ ، $f(x)=x^2+1$ ، $f(x)=x^2-1$ او $f(x)=x^2-2$ تابع ګانو ګرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم او د $f(x)=x^2$ د تابع له ګراف سره یې پرتله کړئ.

20 - د لاندېنيو دويمې درجې تابع ګانو د رأسونو وضعيه کميات اود تناظر د محورونو معادلې پيدا کړئ.

$y=(x-2)^2 \qquad y=(x+3)^2-4$

21 - د $y=-\frac{x}{2}$ تابع ګراف رسم کړئ.

22 - د $f(x)=\frac{x^2-5}{x+2}$ تابع عمودي او مايل مجانبونه پيدا کړئ.

23 - د $h(x)=\frac{x+1}{x-4}$ تابع د افقي مجانب معادله عبارت ده له:

$a)\quad y=-1$ $\qquad b)\quad y=1$

$c)\quad y=-\frac{1}{4}$ $\qquad d)\quad y=4$

24 - د $f(x)=\begin{cases}3x+1 & : x<2\\ -x & : x\geq 2\end{cases}$ د تابع ګراف رسم کړئ.

25- $g(x)=|x|-5$ د تابع ګراف رسم او د قیمتونو ساحه یې پیدا کړئ.

26 - د علامې تابع د قیمتونو په ساحه کې کوم عددونه شامل وي؟

27 - د لاندېنیو تابع ګانو معکوسه تابع پیدا کړئ او وښیاست چې $f(f^{-1}(x))=x$ دی.

$f(x)=\frac{1}{8}x$ $\quad f(x)=8x-1$ $\quad f(x)=x^2+6$

$f(x)=\frac{4x+6}{5}$ $\quad f(x)=x^3-1$

28 - آیا د $g(x)=x^2$ تابع معکوس منونکې ده؟ (معکوس یې هم یوه تابع ده)

29 - که $(fog)(x)=(gof)(x)$ وي، د f او g تابع ګانې سره څه اړیکه لري؟

30 - د X او Y له محورونو سره د $g(x)=3-\frac{3}{2}x$ د ګراف، د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پیدا کړئ.

31 - د $f(x)=-3$ تابع ګراف رسم کړئ.

32 - د $f(x)=2x^2+4x+5$ تابع د ګراف د رأس د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

33 - د $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $f(x)=3x^2$, $f(x)=2x^2$ او $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او د $f(x)=x^2$ تابع د ګراف سره یې پرتله کړئ.

34 - د $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ د ناطقې تابع مایل مجانب عبارت دی له:

a: $y=x$

b: $y=x-1$

c: $y=x+1$

څلورم څپرکی

مثلثاتي تابع ګانې





زاویه او راډیان(Angle and Radian)
زاويه او د زاويې د اندازه کولو واحدونه:

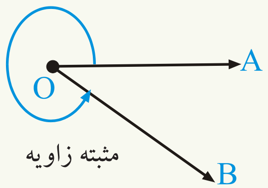
آيا زاويه په مثلثاتو او هندسه کې يو له بله توپير لري؟
آيا په هندسه کې منفي زاويې شته دي؟

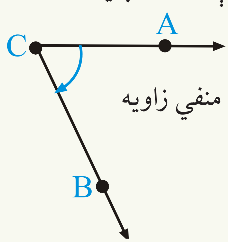
له هندسي څخه پوهېږو، زاويه هغه شکل دی چې د دوه نيمو خطونو له يو ځای کېدو څخه چې مشترکه مبدأ ولري، تشکيل شوی وي چې مشترکه مبدأ د زاويې له رأس څخه عبارت ده. په هندسه کې زاويه له $1°$ څخه تر $360°$ پورې وي، خو په مثلثاتو کې په هره اندازه زاويه درلودلای شو. له بلې خوا په مثلثاتو کې مثبتې او منفي زاويې هم شته دي.

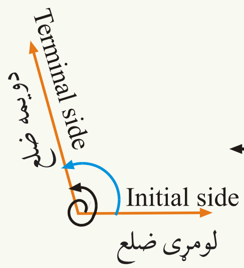
په مثلثاتو کې زاويه د يو خط له دوران څخه په دې ډول چې د خط يو انجام ثابت وي، لاس ته راځي. چې د لومړي خط دوران د دويمې ضلعې موقعيت اختياروي(يوه ضلع د رأس په نقطه کې دوران کوي). د ساعت د عقربې د حرکت مطابق دوران(clockwise) منفي او د ساعت د عقربې د حرکت مخالف(Counter clockwise) دوران مثبت فرض شوی دی.

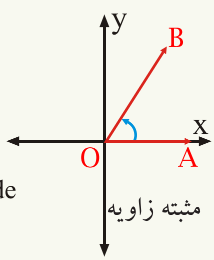
چې لومړۍ ضلعې ته (Initial side) او د دوران پای ته دويمه ضلع (Terminal side) وايي.

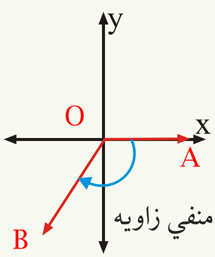
لکه: څرنګه چې په شکل کې ليدل کېږي.



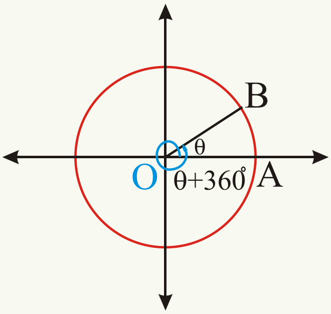






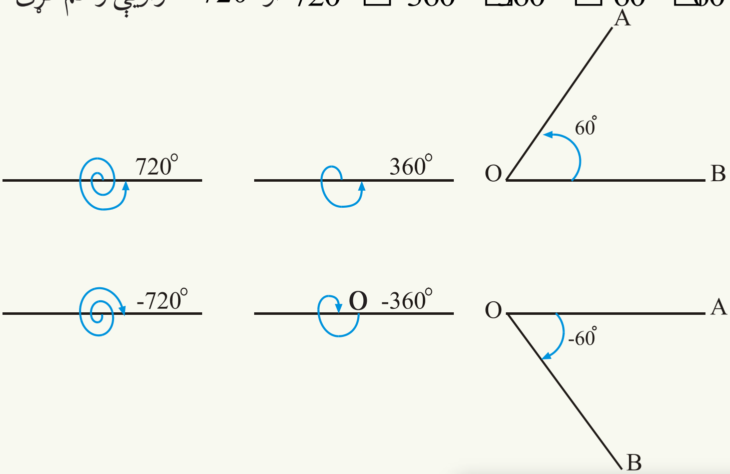


که په شکل کې د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته د مختصاتو د مبدأ پر شاوخوا د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف جهت کې دوران ورکړو، د θ زاویه لاس ته راځي.



که د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته د 360° په اندازه(یو پوره دوارن) دوران ورکړو، او دوران ته دوام ورکړو، تر څو د$\overrightarrow{OA}$ نیم خط د OB موقعیت ته ورسېږي. په دې حالت کې جوړه شوې زاویه $\theta+360^\circ$ ده. او که د دوو پوره دورانونو وروسته د B ټکي ته ورسېږو، طی شوې زاویه به $\theta+720^\circ$ او په همدې ډول که د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته K دورانونه ورکړو او د B ټکي ته ورسېږو، نو د زاویې اندازه به $\theta+K\cdot360^\circ$ وي، لکه: څرنګه چې لیدل کېږي، په مثلثاتو کې له 360° څخه لویې زاویې هم شته دی.

لومړی مثال: د 60° □ -60° □ 360° □ -360° □ 720° او -720° زاویې رسم کړئ.



فعالیت

د 45° , 90° , -180° او 180° زاویې رسم کړئ.

د زاویې د اندازه کولو واحدونه: زاویه د درجې، ګراد او راډیان په مرسته اندازه کېږي.

درجه: د یو دوران (Rotation) $\frac{1}{360}$ برخه له درجې څخه عبارت ده، یا دیوې قایمې زاویې $\frac{1}{90}$ برخې ته درجه وایي.

$$1^{\circ} = 60' \qquad 1' = 60'' \qquad 1^{\circ} = 60 \cdot 60 = 3600''$$

$$(\frac{1}{60})^{\circ} = 1' \quad , \quad (\frac{1}{60})' = 1'' \qquad (\frac{1}{3600})^{\circ} = 1''$$

دویم مثال: $35^{\circ}\ 15'\ 27''$ د درجې په اعشاري شکل ولیکئ او $(48,3625)^{\circ}$ په درجه، دقیقه او ثانیه(DMS) واړوئ.

حل

$$35^{\circ}\ 15'\ 27'' = 35^{\circ} + (\frac{15}{60})^{\circ} + (\frac{27}{3600})^{\circ} = 35^{\circ} + 0,25^{\circ} + 0,0075^{\circ} = 35,2575^{\circ}$$

$$48,3625^{\circ} = 48^{\circ} + 0,3625^{\circ} = 48^{\circ} + (0,3625 \cdot 60)' = 48^{\circ} + (21,75)'$$

$$= 48^{\circ} + (21)' + (0,75 \cdot 60)'' = 48^{\circ}\quad 21'\quad 45''$$

فعالیت

$36^{\circ}\ 47'\ 12''$ په درجه واړوئ او $55,967663^{o}$ په درجه، دقیقه او ثانیه (DMS) (Degree, Minute, Second) واړوئ.

ګراد: ګراد هم د زاویې د اندازه کولو واحد دی، د یو دوران $\frac{1}{400}$ برخې ته ګراد وایي. د ګراد $\frac{1}{100}$ برخې ته دقیقه ګراد او د دقیقه ګراد $\frac{1}{100}$ مې برخې ته ثانیه ګراد وایي.

$$1g = 100'g \quad , \quad 1'g = 100''g \quad , \quad 1g = 10000''g$$

د درجې بدلول په ګراد او د ګراد بدلول په درجې باندې: کولای شو چې درجه په ګراد او ګراد په درجه واړوو.

دریم مثال: 45° درجې په ګراد او $100g$ په درجه واړوئ.

حل: څرنګه چې یو مکمل دوران 360° یا $400g$ دی نو:

$$360^\circ = 400g \qquad 400g = 360^\circ$$

$$1^0 = \frac{400}{360}g = \frac{10}{9}g \qquad 1g = (\frac{360}{400})^\circ = (\frac{9}{10})^\circ$$

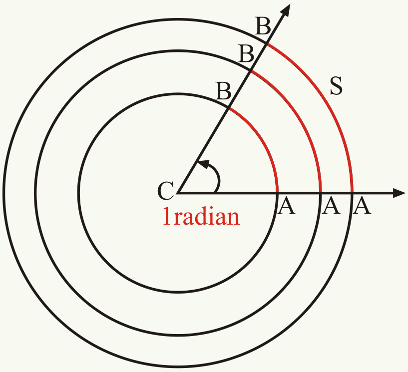
$$45^\circ = 45(\frac{10}{9})g = 50g \qquad 100g = 100(\frac{9}{10})^\circ = 90^\circ$$

اویا:

$$\frac{d}{180} = \frac{g}{200} \quad , \quad \frac{d}{180} = \frac{100}{200}$$

$$d = \frac{180 \cdot 100}{200} = 90^\circ$$

راډیان(Radian): د درجې او ګراد سربېره د زاویې د اندازه کولو بل واحد راډیان دی. راډیان د هغوي مرکزي زاويې اندازه ده چې د مقابل قوس اوږدوالی يې د شعاع له اوږدوالی سره مساوي وي. راډيان په عالي رياضياتو کې ډېر استعمالیږي. په شکل کې د $\hat{ACB}$ مرکزي زاويه چې شعاع يې r او د AB قوس اوږدوالی له r سره مساوي دی، نو د $\hat{ACB}$ زاويه 1Radian ده.

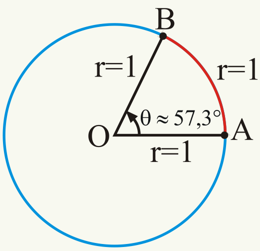


$$\hat{ACB} = 1\,\text{radian} = 1^R$$

که د AB قوس د دايرې له شعاع r سره مساوي وي، θ د راډيان په حساب مساوي ده په:

$$\hat{\theta} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{s}{r} \text{ او يا } s = r\theta$$

په مثلثاتي دايره يا واحده دايره(Unite Circle) کې چې شعاع يې د اوږدوالی واحد او مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې واقع وي، د راډيان په حساب د مرکزي زاويې اندازه له مقابل قوس سره مساوي ده.



$$\theta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{1} = \overset{\frown}{AB} = S \quad radian$$

خرنگه چې د دایرې محیط $C = 2\pi r$ دی، نو $\frac{2\pi\, r}{r} = 2\pi \;\; radian$ په دې معنا چې یو پوره دوران 360^o یا $2\pi^R$ دی.

$$2\pi^R = 360^\circ$$

$$1^R = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx \frac{180^\circ}{3.14159} \approx (57.29578)^\circ \approx 57^\circ 17'45'' \approx (57.3)^\circ$$

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \approx \frac{3.14159}{180^\circ} \approx 0.01745\,\text{Randians}$$

څلورم مثال: د $\frac{\pi}{3}$ *radian* د مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی پیدا کړئ، که د دایرې قطر 30m وي.

حل:خرنگه چې: $r = \frac{d}{2} = \frac{30m}{2} = 15m$ دی، نو: $s = r\theta = 15(\frac{\pi}{3}) = 5\pi\; m \approx 15{,}7m$

فعالیت

د 1Rad مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی به څو سانتي متره وي؟ که د دایرې شعاع 10cm وي.

د درجې او گراد بدلول په راډیان او د راډیان بدلول په درجه او گراد:

خرنگه چې $360^o = 400g = 2\pi^R$ دی،نو $\frac{R}{2\pi} = \frac{g}{400} = \frac{d}{360^\circ}$ او یا $\frac{R}{\pi} = \frac{g}{200} = \frac{d}{180}$

او یا

$$360^o = 2\pi^R$$

$$1^o = (\frac{2\pi}{360})^R = (\frac{\pi}{180})^R$$

په همدې ډول خرنگه چې: $2\pi^R = 360^o$

$$1^R = (\frac{360}{2\pi})^o = (\frac{180}{\pi})^o$$

$$1^R = \frac{200g}{\pi} = \frac{200g}{3,1415} \approx 63,66198g$$

پنځم مثال: د 75^o ، 220^o ، -400° ، $-100g$ او 40° زاويې په راډيان واړوئ.

څرنگه چې $1^o = (\frac{\pi}{180})^R$ ده، نو:

$$220\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{9}\text{radain},\qquad 75^\circ\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}\text{radain}$$

$$40^\circ\cdot\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{9}\text{ radian}\qquad -400^\circ\cdot\frac{\pi}{180} = -\frac{20\pi}{9}\text{ radain}$$

څرنگه چې يو پوره دوران $2\pi^R$ او يا $400g$ دی، نو:

$$1g = (\frac{2\pi}{400})^R = (\frac{\pi}{200})^R$$

$$-100g = (-100\cdot\frac{\pi}{200})^R = (-\frac{\pi}{2})^R$$

پوښتنه: که د گراد په حساب له يوې زاويې څخه 30 واحده کم کړو، په لاس راغلی عدد، د زاويې اندازه په درجه راکوي، دا زاويه څو راډيانه ده؟

حل

$$\frac{10}{9}D - 30 = D$$

$$\frac{10}{9}D - D = 30 \Rightarrow \frac{10D - 9D}{9} = 30 \Rightarrow D = 270^\circ$$

$$\frac{270}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{3\pi}{2}\text{Radian}$$

نو دا زاويه $\frac{3\pi}{2}$ راډيانه ده.

شپږم مثال : a) $(\frac{5\pi}{6})$ ، $\frac{\pi}{5}$ ، $\frac{4\pi}{9}$ او 6π راډيان په درجه واړوئ.

b): د يو دوران(Revolution) $\frac{1}{4}$ برخه څو راډيانه کېږي؟

حل

$$1^R = \left(\frac{180}{\pi}\right)^o \quad , \quad \frac{\pi}{5}\cdot\frac{180}{\pi} = 36^\circ$$

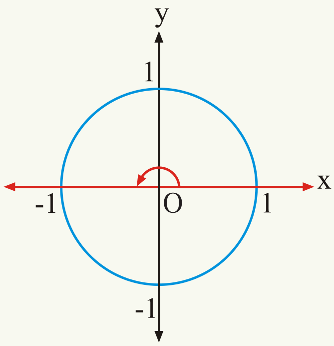
$$a : \left(\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\left(\frac{180}{\pi}\right) = 150^\circ \quad , \quad 6\pi\cdot\frac{180}{\pi} = 1080^\circ \quad , \quad \frac{4\pi}{9}\cdot\frac{180}{\pi} = 80^\circ$$

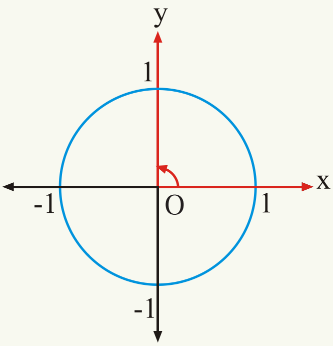
$$b : = \frac{1}{4}\cdot 2\pi^R = \frac{\pi}{2}\,\text{radian}$$

لاندې شکلونه وګورئ.

$\frac{1}{2}\,\text{Rev}$, $\frac{1}{4}\,\text{Rev}$

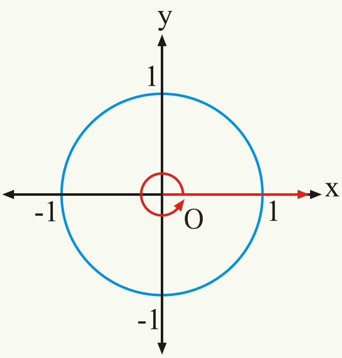
$\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi^R$, $\frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}\,\text{Radain}$

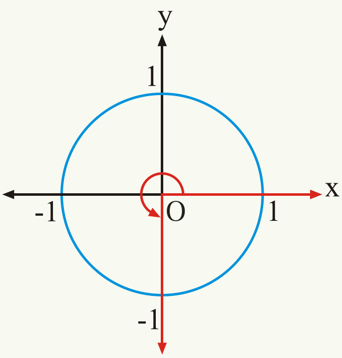




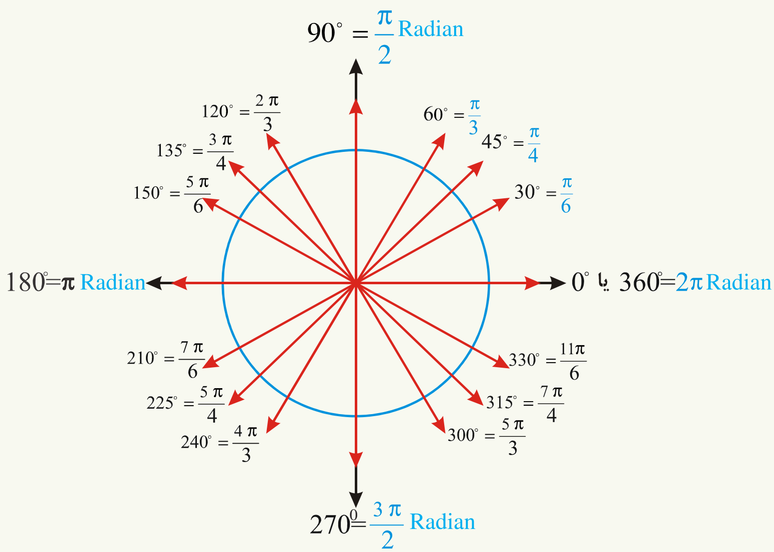
1 Revolution , $\frac{3}{4}\,\text{Revolution}$

2π Radians , $\frac{3}{4}\cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}\,\text{Radians}$





د درجي او راډیان
تر منځ د اړیکي
د ښه څرګندېدو
لپاره لاندي شکل
هم وګورئ:



فعالیت

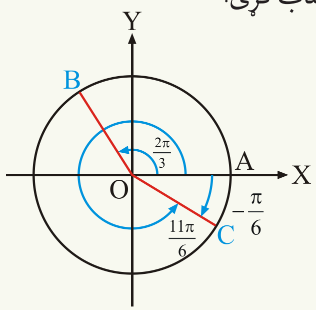
$\frac{\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{4}$ او $\frac{5\pi}{4}$ – راډیانه زاویې په درجه واړوئ.

اووم مثال

a) د $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{6}$ او $\frac{\pi}{6}$ – زاویې په شکل کې وښیاست:

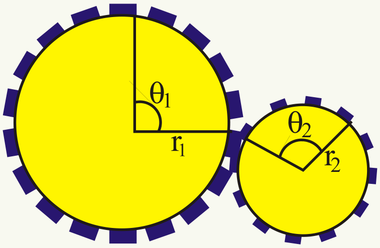
b) په شکل کې لوی او کوچنی خرخ ښودل شوی دی، که د θ_1 او θ_2 د زاویو مقدار د راډیان په حساب وي، د θ_2 د زاویې مقدار د θ_1، r_1 او r_2 له جنسه حساب کړئ.

د (a) حل:



له شکل څخه لیدل کېږي چې د $\frac{11\pi}{6}$ او $-\frac{\pi}{6}$ زاویو دویمې ضلعې یو پر بل منطبقې دي.

د (b) حل:



$$\theta_2 r_2 = \theta_1 r_1 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\theta_1 r_1}{r_2}$$

اتم مثال: که د ساعت د ثانیې عقربې 40 ثانیې دوران کړی وي، د ثانیې د عقربې په واسطه طی شوې مثبته زاویه په راډیان پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې 60 ثانیې یو پوره دوران یا 2π راډیان کېږي، نو $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}Rev$ او څرنګه چې یو دوران 2π *Radian* دی، نو: $\frac{2}{3}\cdot 2\pi^R = \frac{4\pi}{3}$ Radian

همدارنګه د ساعت د دوو عقربو تر منځ د زاویې د پیدا کولو لپاره له $\theta = |5{,}5\min - 30hr|$ څخه کار اخلو.

د مثال په توګه د 3 بجو او 40 دقیقو په وخت کې د ساعت ګرد او دقیقه ګرد په منځ کې زاویه څو درجې ده؟

$$\theta = |5{,}5\cdot 40 - 30\cdot 3| = 130^{\circ}$$

پوښتنې

1 - که د یوې مرکزي زاویې مقابل قوس $50cm$ او د دایرې شعاع $25cm$ وي، مرکزي زاویه به څو راډیانه وي؟

2 - $32{,}4222^{\circ}$ په درجې، دقیقې او ثانیې واړوئ.

3 - د یو دوران $\frac{1}{8}$ برخه څو راډیانه، څو درجې او څو ګراده کېږي؟

4 - $\frac{5\pi}{4}$ راډیانه څو ګراده او $-7{,}5^{\circ}$ څو راډیانه کېږي؟

5- $225^o, -315^o, 720^o$ او 45^o زاويې په راډيان او ګراد واړوئ

6 - د يو دوران $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{18}$ او $\frac{4}{5}$ برخې څو راډيانه او څو درجې کېږي؟

7 - $\frac{11\pi}{3}$, $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{10}$, $\frac{2\pi}{5}$ او $-\frac{5\pi}{12}$ راډيانه په درجو واړوئ

8 - که د يو ساعت د ثانيې د عقربې اوږدوالى 6cm وي، په 40 ثانيو کې د ثانيې عقربه څو سانتي متره فاصله طى کوي؟

9 - که د دايرې شعاع 3cm او مرکزي زاويه $\frac{5}{3}$ راډيانه وي. د دې مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالى به څو سانتي متره وي؟

10 - که د يو ساعت د ثانيې د عقربې دوران 35 ثانيې وي، نو د ثانيې عقربې به څو راډيانه مثبته زاويه طى کړې وي؟

11 - د دوو زاويو مجموعه 152^o ده، که د يوې زاويې اندازه د درجې په حساب له بلې زاويې سره د ګراد په حساب برابره وي، د هرې زاويې اندازه د راډيان په حساب څومره ده؟

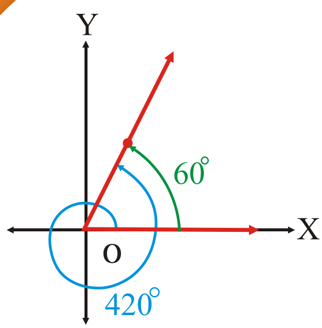
12- 1620^o څو راډيانه کېږي؟

a) $4\pi^R$ b) $8\pi^R$ c) $9\pi^R$ d) $10\pi^R$

13 - څلور دورانونه څو راډيانه کېږي؟

a) $2\pi^R$ b) $4\pi^R$ c) $6\pi^R$ d) $8\pi^R$

14 - که د يوې دايرې شعاع 10m وي، د 45 radian مرکزي زاويې، مقابل قوس به څو متره وي؟



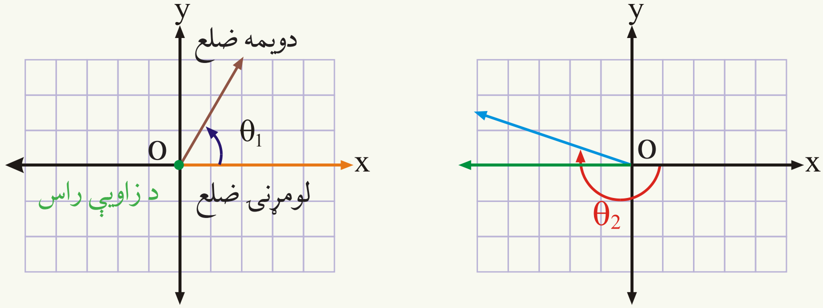
د يوې زاويې معياري حالت او کوټرمينل زاويې

آيا ويلای شئ چې د 60° او 420° زاويو دويمي ضلعې يو پر بل منطبق دي؟ ولې؟

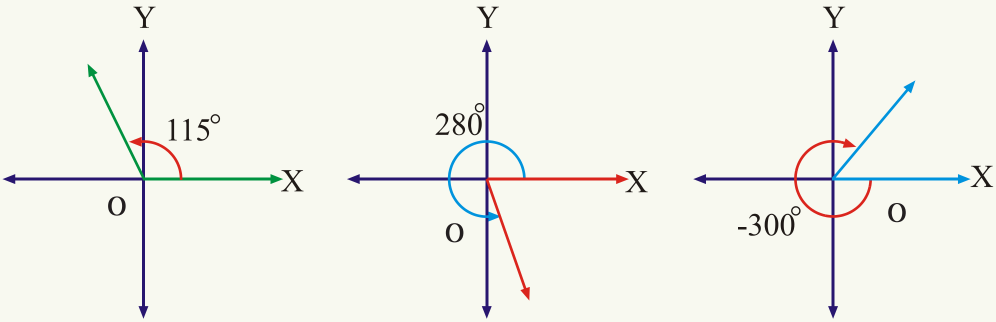
د يوې زاويې معياري حالت (Standard position of an angle):

که د يوې زاويې رأس د وضعيه کمياتو په مبدأ کې او لومړنی ضلع يې د X د محور په مثبت جهت پرته وي، نو دا زاويه په معياري حالت کې ده.

د مثال په توګه: په لاندې شکلونو کې د θ_1 او θ_2 زاويې په معياري حالت کې ښودل شوې دي.



لومړی مثال: 115°، 280° او -300° زاويې په معياري حالت کې رسم کړئ.



که په معیاري حالت کې د یوې زاویې دویمه ضلع د X او یا د Y پر محور منطبق شي، داسې زاویې ته ربعي زاویه(Quadrantale angle) وایي.

د مثال په توګه: $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ او داسې نورې زاویې ربعي زاویې دي.

فعالیت

د $130^\circ, 50^\circ, 500^\circ$ او -210° زاویې په معیاري حالت کې رسم کړئ.

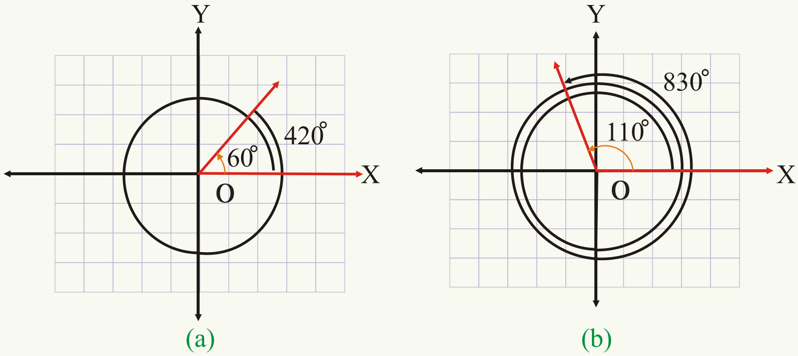
کوټرمینل زاویې: (Conterminal angles)

دوې یا څو زاویې چې په معیاري حالت کې یې دویمې ضلعې یو پر بل منطبقې شي، د کوټرمینل زاویو په نامه یادېږي.

دویم مثال: په شکل کې وښیاست چې د 60° او 420^o زاویې او همدارنګه د 110° او 830° زاویې چې په معیاري حالت کې دي، یو له بلې سره کوټرمینل زاویې دي.

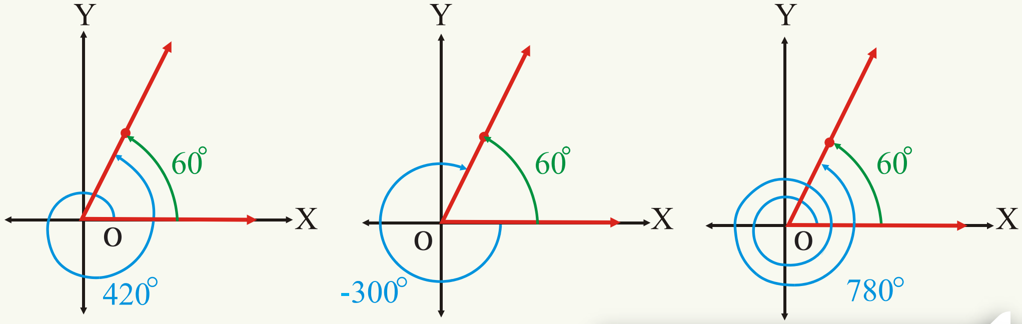
حل: څرنګه چې په معیاري حالت کې د دې زاویو لومړنۍ ضلعې یو پر بل منطبق دي، لکه څنګه چې په شکل کې لیدل کېږي د 60° او 420^o زاویو دویمې ضلعې(Conterminal sides) یو پر بل منطبق دي. نو د تعریف په اساس دا دواړه زاویې سره کوټرمینل دي.

همدرانګه د 110° او 830° زاویې هم سره کوټرمینل دي.



دریم مثال: په معیاري حالت کې د 60° زاویې سره درې کوټرمینل زاویې رسم کړئ او په شکل کې یې هم وښیاست.

حل: $60^\circ + 2\cdot 360^\circ = 780^\circ, \quad 60^\circ - 360^\circ = -300^\circ, \quad 60^\circ + 360^\circ = 420^\circ$



فعاليت

ایا د 230° ، 590° او 230° ، -130° زاويې سره کوټرمينل دي؟ رسم يې کړئ.

خرنګه چې کوټرمينل زاويې يو له بله سره د يوه پوره دوران (360°) يا $2\pi^R$ او يا څو دورانونه $n\cdot 360^\circ$ او يا $n\cdot 2\pi$ توپير لري، نو د θ د زاويې سره کوټرمينل زاويې عبارت دي له:

$$\theta+2\pi \qquad \theta+360^\circ$$

$$\theta+2\cdot 2\pi \qquad \theta+2\cdot 360^\circ$$

$$\theta+3\cdot 2\pi \qquad \theta+3\cdot 360^\circ$$

— — — — —   — — — — —

$$\theta+2n\pi \qquad \theta+n\cdot 360^\circ$$

خلورم مثال:

a) له 30° زاويې سره څلور کوټرمينل زاويې پيدا کړئ.

b): له 90° زاويې سره دوه کوټرمينل زاويې پيدا او په شکل کې يې وښياست.

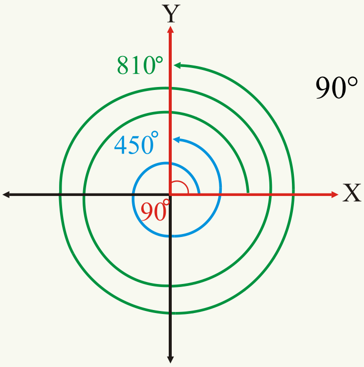
حل(a)

$$30^\circ+360^\circ=390^\circ \text{ يا } \frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{13\pi}{6} \text{ Radian}$$

$$30^\circ+2\cdot 360^\circ=750^\circ \text{ يا } \frac{\pi}{6}+2\cdot 2\pi=\frac{25\pi}{6} \text{ Radian}$$

$$30^\circ+3\cdot 360^\circ=1110^\circ \text{ يا } \frac{\pi}{6}+3\cdot 2\pi=\frac{37\pi}{6} \text{ Radian}$$

$$30^\circ+4\cdot 360^\circ=1470^\circ \text{ يا } \frac{\pi}{6}+4\cdot 2\pi=\frac{49\pi}{6} \text{ Radian}$$



حل(b

$90^\circ + 2\cdot 360^\circ = 810^\circ$ $\qquad$ $90^\circ + 360^\circ = 450^\circ$

پنځم مثال: آیا $\underline{410^\circ, 50^\circ}$ $\quad$ $\underline{800^\circ, 80^\circ}$ $\quad$ $\underline{-680^\circ, 40^\circ}$ او د 60° او 410° زاویې سره کوټرمینل دي؟

حل: څرنگه چې $410^\circ = 50^\circ + 360^\circ$ دی، نو د 50° او 410° زاویې سره کوټرمینل دي او $800^0 = 80^\circ + 2\cdot 360^\circ$ نو د 80° او 800° زاویې هم سره کوټرمینل دي. همدرانگه $-680^\circ = 40^\circ - 2\cdot 360^\circ$ نو 40° او -680° زاویې هم سره کوټرمینل دي، خو $410^\circ \neq 60^\circ + 360^\circ$، نو د 410° او 60° زاویې سره کوټرمینل نه دي.

که د یوې زاویې رأس د وضعیه کمیاتو په مبدآ کې او لومړنی ضلع یې د X د محور پر مثبت جهت منطبق وي، نو دا زاویه په معیاري حالت کې ده. که په معیاري حالت کې د دوو یا څو زاویو دویمې ضلعې یو پر بل منطبق وي، داسې زاویې د کوټرمینل زاویو په نوم یادیږي.

پوښتنې

1 - د $-270^\circ, 120^\circ, 90^\circ$ او 240° زاویې په معیاري حالت کې رسم کړئ.

2 - تر ټولو کوچنۍ مثبته زاویه پیدا کړئ چې له لاندېنیو زاویو سره کوټرمینل وي.

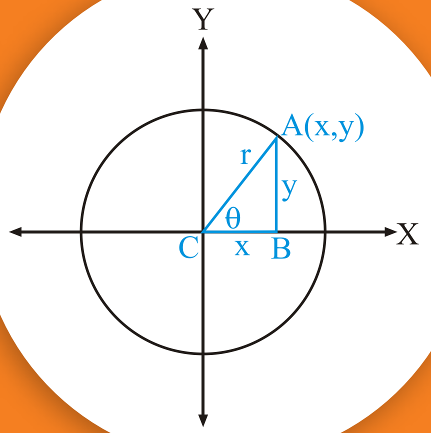
$-40^\circ \qquad -125^\circ \qquad 450^\circ \qquad 539^\circ \qquad 60^\circ \qquad 90^\circ \qquad 135^\circ$

3 - آیا د (-80° ، 280°) او د (35° ، 395°) زاویې سره کوټرمینل دي؟

4 - له 40° زاویې سره، شپږ کوټرمینل زاویې پیدا کړئ.

5 - آیا د $(-930^\circ, 150^\circ)$ او د $(180^\circ, 900^\circ)$ زاویې سره کوټرمینل دي، په شکل کې یې هم وښیاست؟

مثلثاتي تابعګاني
(Trigonometric Functions)



آیا ویلای شئ چې د θ د زاويې مثلثاتي نسبتونه د θ د زاويې د ضلعو په اوږدوالی پورې اړه لري او که نه؟

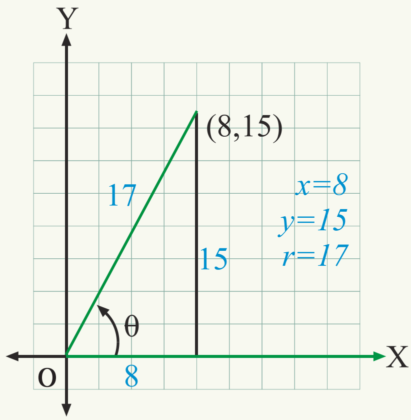
خرنګه چې پوهېږو چې د يوې حادې زاويې (θ) مثلثاتي نسبتونه (Trigonometric ratios) په يوه قايمه الزاويه مثلث کې په لاندې ډول تعريف شوي دي.

$$\sin\theta=\frac{AB}{AC}=\frac{y}{r}\ ,\ \cos\theta=\frac{BC}{AC}=\frac{x}{r}$$

$$\tan\theta=\frac{AB}{BC}=\frac{y}{x}\ ,\ \cot\theta=\frac{BC}{AB}=\frac{x}{y}$$

$$\sec\theta=\frac{AC}{BC}=\frac{r}{x}\ ,\ \csc\theta=\frac{AC}{AB}=\frac{r}{y}$$

او په نتيجه کې ليدل کيږي چې: $\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$ او $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$.



لومړی مثال: که په معياري حالت کې د θ زاويې دويمه ضلع د $(8,15)$ له ټکي څخه تېره شي، د θ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

د فيثاغورث د قضيې په اساس لروچې:

$r^2=x^2+y^2$ دی.

$r^2 = 8^2 + (15)^2 = 64 + 225 = 289$

$r = \sqrt{289} = 17$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{15}{17}$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{8}{17}$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{15}{8}$, $\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{8}{15}$

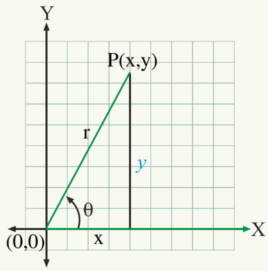
$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{17}{8}$, $\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{17}{15}$

د زاویو د ځینو مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اساسي اړیکي:

د فیثاغورث د قضیې په اساس د شکل له مخې لیکلای شوچې:

$y^2 + x^2 = r^2$..................I

دواړو خواوې په r^2 وېشو:



$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$

$(\frac{y}{r})^2 + (\frac{x}{r})^2 = 1$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

همدارنگه که د (I) معادلې دواړه خواوې په y^2 ووېشو، نو لرو چې:

$\frac{y^2}{y^2} + \frac{x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2} \Rightarrow 1 + (\frac{x}{y})^2 = (\frac{r}{y})^2$

$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

او که د (I) معادلې دواړه خواوې په x^2 ووېشو:

$\frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} \Rightarrow (\frac{y}{x})^2 + 1 = (\frac{r}{x})^2$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

له بلې خوا:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{y}{x}=\tan\theta \qquad \frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{x}{y}=\cot\theta$$

او له دې څایه څخه نتیجه کېږي چې:

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\ ,\ \sin\theta\cdot\csc\theta=1\ ,\ 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta\ ,\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta\cdot\cot\theta=1\ ,\ \cos\theta\cdot\sec\theta=1\ ,\ 1+\cot^2\theta=\csc^2\theta\ ,\ \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

څرنګه چې دا اړیکې د θ د هر قیمت لپاره سمې دي، نو په دې اساس مثلثاتي مطابقتونه هم ورته وايي.

فعالیت

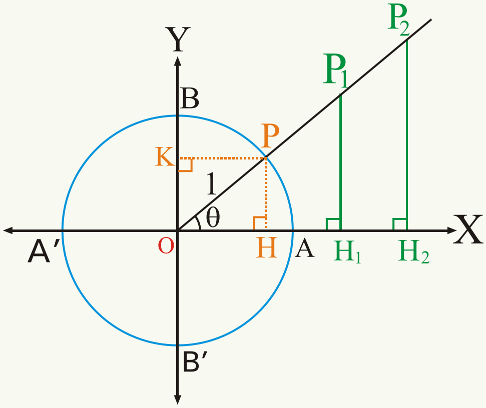
که په معیاري حالت کې د θ دویمه ضلع د $(12,5)$ له ټکي څخه تېره شي، د θ د زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د مثلثاتي تابع ګانو پورتني قیمتونه یوازې د θ زاویې د اندازې پورې اړه لري، د P د ټکي پر موقعیت پورې چې د θ پر دویمه ضلع واقع دی اړه نه لري چې دا حقیقت په شکل کې د $\overset{\Delta}{OH_1P_1} \sim \overset{\Delta}{OPH}$ او $\overset{\Delta}{OH_2P_2}$ مثلثونو د مشابهت په اساس لیدل کېږي.

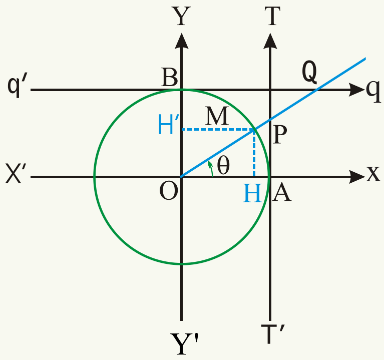
$|OP|=1$

$$\cos\theta=\frac{|OH|}{|OP|}=\frac{|OH_1|}{|OP_1|}=\frac{|OH_2|}{|OP_2|}$$

$$\sin\theta=\frac{|PH|}{|OP|}=\frac{|P_1H_1|}{|OP_1|}=\frac{|P_2H_2|}{|OP_2|}$$



که د θ زاویه د راډیان په حساب وي. θ آزاد متحول او $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \cot\theta, \sec\theta$ او $\csc\theta$ مقید (مربوط) متحولونه دي. په دې معنا چې $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \cot\theta, \sec\theta$ او $\csc\theta$ مثلثاتي تابعګاني دي چې مقدار يې د θ د ضلعو اوږدوالي پورې اړه نه لري، بلکې د θ د زاويې په مقدار پورې اړه لري.



خرنګه چې مثلثاتي دايره (Trigonometric Circle) هغه دايره ده چې د شعاع اوږدوالي يې د اوږدوالي واحد دی.

په مثلثاتي دايره کې چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبداکې او د XX' او YY' محورونه د دې دايرې افقي او عمودي قطرونه دي. د قرارداد په اساس $y'oy$ ته د ساینو محور او $x'ox$ ته د کوساینو محور وايي. د TAT' محور چې د A په ټکي کې له دايرې سره مماس دی، د ټانجانټ محور او د $q'Bq$ محور چې د B په ټکي کې پر دايره مماس دی، د کوټانجانټ محور بلل کېږي. د ساینو او کوساینو د محورونو مبدأ د دايرې مرکز او د ټانجانټ د محور مبدأ، د A ټکی د کوټانجانټ د محور مبدأ، د B ټکی دی.

که چیرې د A له ټکي څخه په مثبت جهت کې د M تر ټکي حرکت وکړو او د $M\hat{O}A$ زاويې ته θ ووایو، د θ د زاويې مثلثاتي توابع په لاندې ډول هم تعریفیږي.

$(r = OM = OA = OB = 1)$

$$\sin\theta = \frac{HM}{OM} = \frac{\overline{OH'}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OH'}}{1} = \overline{OH'} \qquad \cos\theta = \frac{\overline{OH}}{OM} = \frac{\overline{OH}}{1} = \overline{OH}$$

$$\tan\theta = \frac{HM}{OH} = \frac{\overline{AP}}{OA} = \overline{AP} \qquad \sec\theta = \frac{OM}{OH} = \frac{OP}{OA} = \overline{OP}$$

$$\cot\theta = \frac{\overline{OH}}{HM} = \frac{BQ}{OB} = \overline{BQ} \qquad \csc\theta = \frac{OM}{HM} = \frac{OQ}{OB} = \overline{OQ}$$

په دې اساس مثلثاتي نسبتونو ته مثلثاتي خطونه هم وايي.

په همدې ډول که د θ دويمه ضلع او يا دقوس پای په دويمه، دريمه يا څلورمه ناحيه (ربع) کې وي.

کولی شو چي مثلثاتي نسبتونه يې پر لاس راوړو:

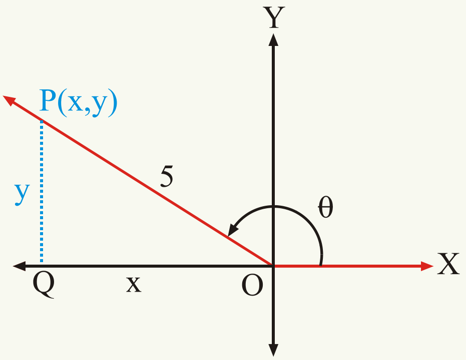
د مثلثاتي نسبتونو علامې په څلورو ناحيو(ربعو) (quadrants) کې په لاندي ډول دي.

$\sin\theta > 0$ $\cos\theta < 0$ $\tan\theta < 0$ $\cot\theta < 0$ $\sec\theta < 0$ $\csc\theta > 0$	$\sin\theta > 0$ $\cos\theta > 0$ $\tan\theta > 0$ $\cot\theta > 0$ $\sec\theta > 0$ $\csc\theta > 0$
$\sin\theta < 0$ $\cos\theta < 0$ $\tan\theta > 0$ $\cot\theta > 0$ $\sec\theta < 0$ $\csc\theta < 0$	$\sin\theta < 0$ $\cos\theta > 0$ $\tan\theta < 0$ $\cot\theta < 0$ $\sec\theta > 0$ $\csc\theta < 0$

$\sec\theta, \cos\theta$	$\tan\theta, \cot\theta$	$\sin\theta, \csc\theta$	ربع
+	+	+	I
−	−	+	II
−	+	−	III
+	−	−	IV

د ویم مثال: له لاندي شکل سره سم که په معیاري حالت کې د θ د زاويې دويمه ضلع، په دويمه ناحيه(ربع) کې واقع وي او $\cos\theta = \frac{-3}{5}$ وي، د θ د زاويې نور مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل: لومړی د P د ټکي وضعيه کميات پيدا کوو: څرنګه چي $\cos\theta = \frac{-3}{5}$ دی، په دويمه ربع کې د x قيمت منفي دی، نو $x = -3$ او $r = 5$ د فيثاغورث د قضيې له مخي لرو چي:



$$5^2 = (-3)^2 + y^2$$

$$y^2 = 25 - 9 = 16$$

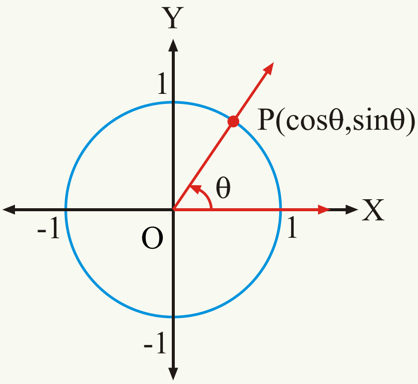
$$y = \pm\sqrt{16}$$

$$y = 4$$

(ځکه چې د P ټکی په دویمه ربع کې دی، $y>0$ دی)

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{4}{5}\ ،\quad \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-3}{5}\ ،\quad \tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{4}{-3}$$

$$\csc\theta=\frac{r}{y}=\frac{5}{4}\ ،\quad \sec\theta=\frac{r}{x}=\frac{5}{-3}\ ،\quad \cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{-3}{4}$$



څرنگه چې د X محور ته د cos محور او د Y محور ته د sine محور وايي، موږ کولای شو چې په مثلثاتي دايره کې د P د ټکي وضعيه کميات له $P(\cos\theta,\sin\theta)$ او يا $P(x,y)$ سره وښايو.

د θ د زاويې مثلثاتي توابع يوازې د θ د زاويې په مقدار پورې اړه لري چې θ آزاد متحول او د θ مثلثاتي نسبتونه مقيد متحولونه دي.

په لومړي ناحيه(ربعه) کې ټول مثلثاتي نسبتونه مثبت، په دويمه ناحيه(ربع) کې $\sin\theta$ او $\csc\theta$ مثبت، په دريمه ناحيه(ربع) کې $\tan\theta,\cot\theta$ مثبت او په څلورمه ناحيه(ربع) کې $\cos\theta,\sec\theta$ مثبت او نور منفي دي.

پوښتنې

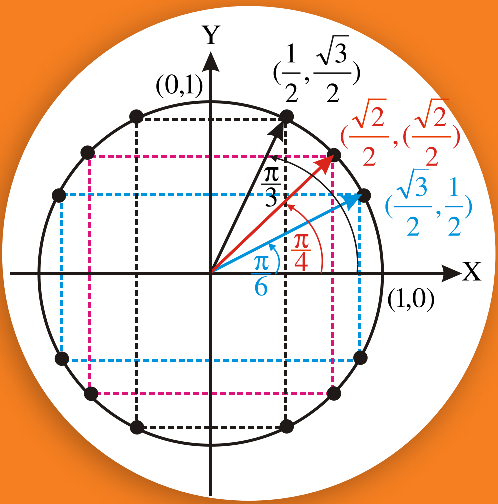
1- د لاندېنيو زاويو د مثلثاتي نسبتونو نښې(علامې) په شفاهي ډول وواياست.

$\sin 120^\circ$ $\tan 170^\circ$ $\tan 60^\circ$ $\cos 330^\circ$ $\sec 200^\circ$

$\cot 271^\circ$ $\csc 91^\circ$ $\sin 271^\circ$ $\csc 181^\circ$ $\csc 315^\circ$

2- که θ په معياري حالت کې د راډيان په حساب وي او د θ دويمه ضلع له لاندې راکړل شوو ټکو څخه تېره شي، $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ او $\tan\theta$ پيدا کړئ.

$$\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)\ ,\ \left(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)\ ,\ \left(\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2}\right)\ ,\ \left(-\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2}\right)$$



د ځينو خاصو زاويو مثلثاتي نسبتونه

آياکولای شئ چي ووایئ $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ دی؟

د 45° مثلثاتي نسبتونه: په يوه قايم الزاويه متساوي الساقين مثلث کې، دوې قايمې ضلعې يې يو، يو واحد په پام کې ونيسئ.

$$r^2 = 1^2 + 1^2$$

$$r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\sin 45^\circ = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مقابله ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

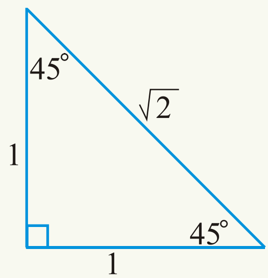
$$\cos 45^\circ = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مجاوره ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مقابله ضلع}}{\text{مجاوره ضلع}} = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \cot\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مجاوره ضلع}}{\text{مقابله ضلع}} = \frac{x}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \sec\frac{\pi}{4} = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاوره ضلع}} = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45^\circ = \csc\frac{\pi}{4} = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابله ضلع}} = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$



فعالیت

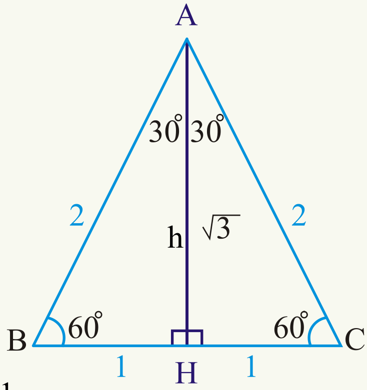
یو متساوي الساقین قایمه زاویه مثلث داسې په پام کې ونیسئ چې هره قایمه ضلع یې b واحده وي، د 45° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

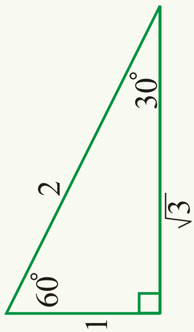
که د $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوي الاضلاع مثلث چې هره ضلع یې دوه واحده وي، په پام کې ونیسو، د A له رأس څخه د AH ارتفاع رسموو، څرنگه چې د $\hat{A}$ زاویه نیمایي شوې ده چې نیمایي یې 30° ده، نو:

$$h^2 + 1^2 = 2^2$$

$$h^2 = 4 - 1 = 3$$

$$h = \sqrt{3}$$





$\sin 30^\circ = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ 　　 $\cos 30^\circ = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30^\circ = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 　　 $\cot 30^\circ = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

$\sec 30^\circ = \sec\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 　　 $\csc 30^\circ = \csc\frac{\pi}{6} = \frac{2}{1} = 1$

فعالیت

یو داسې متساوي الاضلاع مثلث په پام کې ونیسئ چې هره ضلع یې a واحده وي د $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

همدارنګه که شکل ته پام وکړو:

$$\cos 60^\circ = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cot 60^\circ = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\csc 60^\circ = \csc\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \sec 60^\circ = \sec\frac{\pi}{3} = 2$$

لیدل کېږي چې $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ کېږي:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ \qquad \cos 30^\circ = \sin 60^\circ \qquad \tan 30^\circ = \cot 60^\circ$$

$$\sec 30^\circ = \csc 60^\circ \qquad \csc 30^\circ = \sec 60^\circ \qquad \cot 30^\circ = \tan 60^\circ$$

یا په عمومي ډول هر وخت چې د دوو زاویو مجموعه 90° وي، که یوه زاویه θ وي، بله زاویه به $(90^\circ - \theta)$ وي.

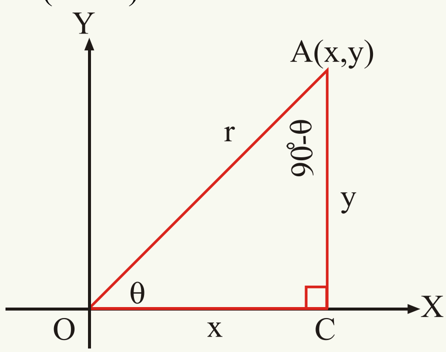
$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{x}{r} \ , \ \cos\theta = \frac{x}{r} \ \Rightarrow \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{y}{r} \ , \ \sin\theta = \frac{y}{r} \ \Rightarrow \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{x}{y} \ , \ \cot\theta = \frac{x}{y} \ \Rightarrow \tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \frac{r}{y} \ , \ \csc\theta = \frac{r}{y} \ \Rightarrow \sec(90^\circ - \theta) = \csc\theta$$

$$\csc(90^\circ - \theta) = \frac{r}{x} \ , \ \sec\theta = \frac{r}{x} \ \Rightarrow \csc(90^\circ - \theta) = \sec\theta$$



فعالیت

په همدې ډول وښياست چې: $\cot(90° - \theta) = \tan\theta$

لکه: څنګه چې د نهم ټولګي په مثلثاتو کې مو ويلي دي چې د زاويو د مثلثاتي نسبتونو جدول هم په همدې اساس جوړ شوی دی:

لومړی مثال: د $39°$ زاويې مثلثاتي نسبتونه راکړل شوي دي، د $51°$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

$\sin 39° = 0{,}6293$ $\tan 39° = 0{,}8098$ $\sec 39° = 1{,}287$

$\cos 39° = ,7771$ $\cot 39° = 1{,}235$ $\csc 39° = 1{,}589$

حل: څرنګه چې $39° + 51° = 90°$ کېږي، نو:

$\sin 51° = \cos 39° = 0{,}7771$ $\cos 51° = \sin 39 = 0{,}6293$

$\tan 51^0 = \cot 39° = 1{,}235$ $\cot 51° = \tan 39° = 0{,}8098$

$\sec 51° = \csc 39 = 1{,}589$ $\csc 51° = \sec 39° = 1{,}287$

پوښتنې

1 - که:

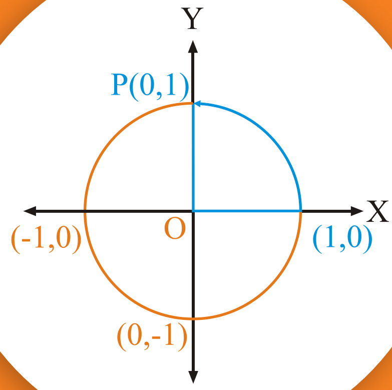
$\sin 17° = 0{,}2927$ $\cos 17° = 0{,}9563$ $\sec 17° = 1{,}046$ $\csc 17° = 3{,}420$

$\cot 17° = 3{,}271$ □ $\tan 17° = 0{,}3057$ وي د $73°$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2 - د لاندې اړيکو څخه کومه يوه يې ناسمه ده؟

$\sin 28° = \cos 62°$ $\cos 12°\ 10'\ 20'' = \sin 77°\ 49'\ 40''$

$\sec 12° = \sec 88°$ $\tan 70° = \cot\ 20°$



د $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ او 360° زاویو مثلثاتي نسبتونه:

آیا $\tan 90^o$ او $\tan 270^o$ تعریف شوي دي؟

د $\frac{\pi}{2} = 90^o$ زاویې مثلثاتي نسبتونه:

خرنگه چې $P(0,1)$ ټکی په مثلثاتي دایره باندې د 90^o زاویې په دویمه ضلع واقع دی، نو:

$r = 1 \qquad x = 0 \qquad y = 1$

$\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$

$\tan\frac{\pi}{2} = \tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{0}$ (تعریف شوی نه دی) $\cot\frac{\pi}{2} = \cot 90^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$

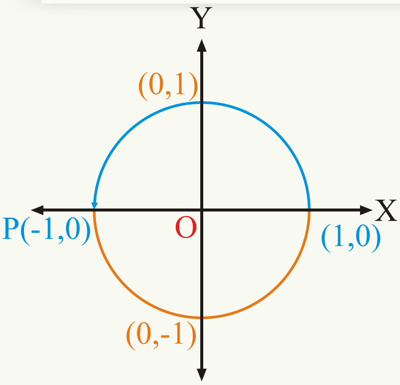
$\sec\frac{\pi}{2} = \sec 90^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0}$ (تعریف شوی نه دی) $\csc\frac{\pi}{2} = \csc 90^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1$

فعالیت

آیا کولای شئ، وواییء چې $\cot 0^\circ$ او $\csc 0^\circ$ تعریف شوي نه دي؟ ولې؟

د 180^o زاویې مثلثاتي نسبتونه: خرنگه چې د $p(-1,0)$ ټکی په مثلثاتي دایره باندې د 180° زاویې په دویمه ضلع باندې پروت دی، نو:

$r = 1 \qquad x = -1$ او $y = 0$ دی.



$$\sin 180^\circ = \sin \pi = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos 180^\circ = \cos \pi = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

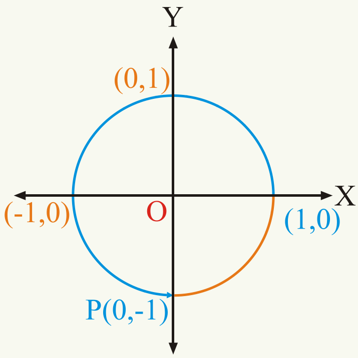
$$\tan 180^\circ = \tan \pi = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0 \qquad \cot 180^\circ = \cot \pi = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} = \text{(تعریف شوی نه دی)}$$

فعالیت

$\sec 180^\circ$ او $\csc 180^\circ$ پیداکړئ.

د $\frac{3\pi}{2} = 270^o$ زاويې مثلثاتي نسبتونه:

څرنګه چې د $P(0,-1)$ ټکی په مثلثاتي دایره باندې د 270^o زاويې پر دويمه ضلع واقع دی.



$$r = 1 \qquad x = 0 \qquad y = -1$$

$$\sin\frac{3\pi}{2} = \sin 270^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \cos\frac{3\pi}{2} = \cos 270^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan\frac{3\pi}{2} = \tan 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0}\text{(تعریف نه دی)} \qquad \cot\frac{3\pi}{2} = \cot 270^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\sec\frac{3\pi}{2} = \sec 270^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0}\text{(تعریف نه دی)} \qquad \csc\frac{3\pi}{2} = \csc 270^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{-1} = -1$$

په یاد ولرئ چې د 360^o او 0^o زاویو مثلثاتي نسبتونه سره مساوي دي، کولای شئ چې ووایئ ولې؟

د $360° = 2\pi$ زاویې مثلثاتي نسبتونه:

خرنگه چې د $p(1,0)$ نقطه د $360°$ د زاویې په دویمه ضلعه باندې پرته ده، نو:

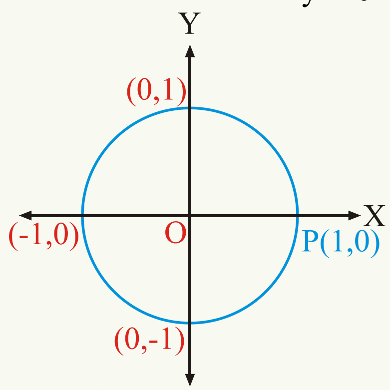
$x = 1 \qquad y = 0 \qquad r = 1$

$\sin 2\pi = \sin 360^0 = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos 2\pi = \cos 360^o = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$

$\tan 2\pi = \tan 360^o = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$

$\cot 2\pi = \cot 360^o = \frac{x}{y} = \frac{1}{0}$ (تعریف شوی نه دی)

$\sec 2\pi = \sec 360^o = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1$ ، $\csc 2\pi = \csc 360^o = \frac{r}{y} = \frac{1}{0}$ (تعریف شوی نه دی)



فعالیت

د 0^o زاویې ټول مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$0^o, 90^o, 180^o, 270^o$ او 360^o زاویو ته محوري زاویې وایي چې د هرې زاویې دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه تعریف شوي نه دي.

پوښتني

1- لاندې جدول ډک کړئ.

θ	0°	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					

2- $\tan 270^\circ = ?$

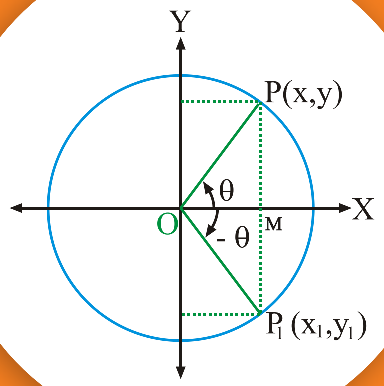
a) -1 b) 1 c) 0 d) تعریف شوی نه دی

3- $\cos 90^\circ = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) تعریف شوی نه دی

4- آیا $\cos\frac{3\pi}{2} = \cos\frac{9\pi}{2}$ دی؟ ولې؟

د يوې حاده زاويې او نورو زاويو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړيکې:



ځرنګه چې مو په نهم ټولګي کې ولیدل چې مثلثاتي جدول یوازې د یوې حادې مثبتې زاويې مثلثاتي نسبتونه را ښيي ددې لپاره چې د منفي او منفرجه زاويو مثلثاتي نسبتونه هم له مثلثاتي جدول څخه پيدا کړای شو، نو باید ددې زاويو او د يوې حاده مثبتې زاويې د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړيکې پيدا کړو.

د $\hat{\theta}$ او $-\hat{\theta}$ زاويو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړيکې:

د θ حاده زاويه مثبت او له θ سره مساوي زاويه، د ساعت د عقربې د حرکت په جهت کې $-\theta$ زاويه په معياري حالت په مثلثاتي دايره کې رسموو.

د $P(x,y)$ ټکی د θ پر دويمه ضلع او د $P_1(x_1,y_1)$ ټکی د $-\theta$ د زاويې پر دويمه ضلع واقع دی.

ځرنګه چې په پورته شکل کې د $\overset{\Delta}{OMP}$ او $\overset{\Delta}{OMP_1}$ مثلثونه يو له بله سره مساوي دي.

$$x_1 = x \qquad |y_1| = |y| \qquad -y_1 = y \quad \Rightarrow \quad y_1 = -y$$

$$\sin(-\theta) = \frac{y_1}{r} = \frac{y_1}{1} = y_1 = -y = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{x}{r} = x = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

$$\cot(-\theta) = \frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

لومړی مثال: د $(-30^\circ = -\frac{\pi}{6})$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل

$$\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan(-30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot(-30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec(-30^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \csc(-30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2$$

فعاليت

و ښياست چې: $\csc(-\theta) = -\text{cec}\theta$, $\text{Sec}(-\theta) = \text{Sec}\theta$.

دويم مثال: د $-\frac{3\pi}{2}$ د زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل:

$$\sin(-\frac{3\pi}{2}) = -\sin\frac{3\pi}{2} = -(-1) = 1$$

$$\cos(-\frac{3\pi}{2}) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

فعاليت

د $-\frac{3\pi}{2}$ زاويې نور څلور مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec\theta \qquad \csc(-\theta) = -\csc\theta$$

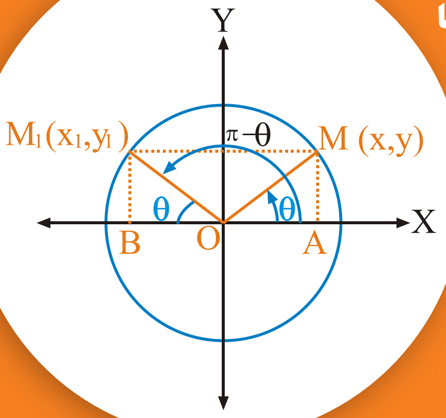
پوښتنې

1 – د -360^o يا -2π راډيان مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2 – د -45^o يا $-\frac{\pi}{4}$ راډيان د (-30°) او (-60°) زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

3 – د -90^o يا $-\frac{\pi}{2}$ راډيان مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

د دوه زاویو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړیکې چې مجموعه او یا توپیر يې π یا 180° وي



- آیا د 150° او 135° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیداکولای شئ؟
- آیا $\sin 135^\circ$ او $\sin 45^\circ$ سره مساوي دي؟ ولې؟
- آیا ویلای شئ چې $\sin 130^\circ$ او $\sin 50^\circ$ یو له بله سره څه اړیکه لري؟

دوې زاويې چې مجموعه يې π یا 180° وي، په پام کې نیسو. که θ یوه حاده مثبته زاویه وي بله زاویه $(\pi-\theta)$ ده. دا دواړه زاويې په مثلثاتي دایره کې په معیاري حالت کې رسموو.

د $M(x,y)$ ټکې د θ د زاويې په دویمه ضلع باندې او د $M_1(x_1,y_1)$ ټکی د $(\pi-\theta)$ یا $(180-\theta)$ د زاويې پر دویمه ضلع باندې واقع دی. څرنګه چې په پورته شکل کې د $\overset{\Delta}{OAM}$ او $\overset{\Delta}{OM_1B}$ مثلثونه سره مساوي دي.

$$(r=1) \qquad |x_1|=|x| \quad -x_1=x \;\Rightarrow\; x_1=-x \qquad y_1=y$$

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin(\pi-\theta)=\frac{y_1}{r}=\frac{y_1}{1}=y_1=\sin\theta$$

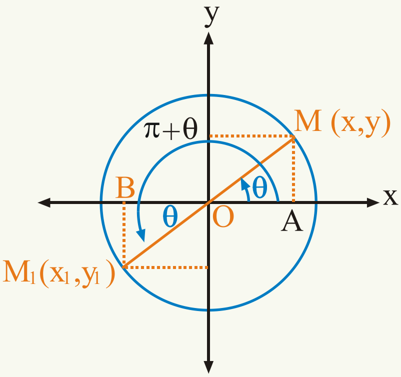
$$\cos(180^\circ-\theta)=\cos(\pi-\theta)=\frac{x_1}{r}=\frac{-x}{r}=\frac{-x}{1}=-x=-\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ-\theta)=\tan(\pi-\theta)=\frac{\sin(180^\circ-\theta)}{\cos(180^\circ-\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$$

فعالیت

- د $(\pi-\theta)$ زاويې نور دري مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د هغو دوو زاويو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکې چې توپیر يې 180° او یا π راډیان وي.



که حاده زاویه θ وي، بله زاویه $(\pi+\theta)$ کېږي.
د $M(x,y)$ ټکی پر مثلثاتي دایره باندې د θ پر دویمه ضلع او د $M_1(x_1,y_1)$ ټکی د $(\pi+\theta)$ یا $(180^\circ+\theta)$ د زاویې پر دویمه ضلع باندې واقع دی.
څرنګه چې د $\overset{\Delta}{OAM}$ او $\overset{\Delta}{OBM_1}$ مثلثونه سره مساوي دي: $y_1=-y \; , \; x_1=-x$

$$\sin(180^\circ+\theta)=y_1=-y=-\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ+\theta)=x_1=-x=-\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ+\theta)=\frac{\sin(180^\circ+\theta)}{\cos(180^\circ+\theta)}=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\tan\theta$$

$$\cot(180^\circ+\theta)=\frac{\cos(180^\circ+\theta)}{\sin(180^\circ+\theta)}=\frac{-\cos\theta}{-\sin\theta}=\cot\theta$$

$$\sec(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\cos(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\cos\theta}=-\sec\theta$$

$$\csc(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\sin(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

لومړی مثال: د 120° او 240° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 120^\circ=\sin(\pi-60^\circ)=\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ=\cos(\pi-60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ=\tan(\pi-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$$

$$\sin 240^\circ=\sin(180^\circ+60^\circ)=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

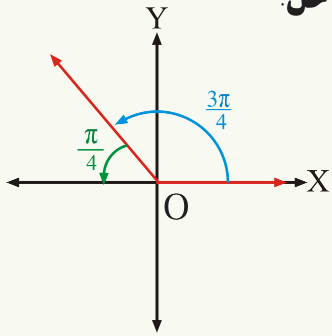
$$\tan 240^\circ = \tan(180^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

فعالیت

د 120° او 240° زاویو نور درې، درې مثلثاتي نسبتونه پیداکړئ.

دویم مثال: د $\frac{3\pi}{4}$ او $\frac{4\pi}{3}$ زاویو sin ، cos او tan پیداکړئ.

حل:

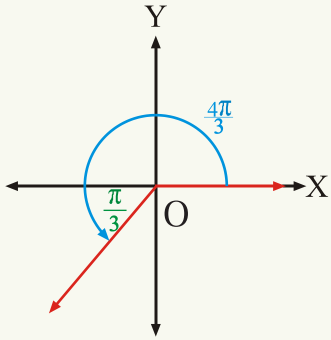


$$\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \tan\frac{3\pi}{4} = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$



$$\frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin\frac{4\pi}{3} = \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{4\pi}{3} = \tan(\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

خرنگه چې $(180^\circ - \theta)$ د زاویې دویمه ضلع په دویمه ناحیه(ربع) کې پرته ده. په دویمه ناحیه کې $\sin\theta$ او $\csc\theta$ مثبت او د $(180^\circ - \theta)$ زاویې نور مثلثاتي نسبتونه منفي دي او خرنگه چې د $(180 + \theta)$ یا $(\pi + \theta)$ زاویې دویمه ضلع په دریمه ربع کې پرته ده، نو ددې زاویې $\tan\theta$ او $\cot\theta$ مثبت او د $(180 + \theta)$ د زاویې نور مثلثاتي نسبتونه منفي دي.

پوښتني

1- د 225^o زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2- د 210^o زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

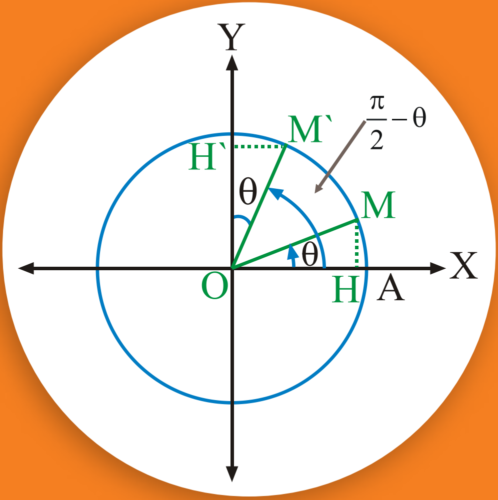
3- د 150^o زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

4- $\cot\frac{3\pi}{4}=?$

a) $-\frac{1}{2}$ b) 1 c) 0 d) -1

5- $\sec(225^\circ)=?$

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ b) $-\frac{2}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$



د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړیکي چي مجموعه يې

90^o یا $\frac{\pi}{2}$ راډیانه وي.

- آیا $\sin 60^o = \cos 30^o$ دی؟ ولې؟
- د 150^o او 60^o زاویو مثلثاتي نسبتونه سره څه اړیکه لري؟

د $A\hat{O}M$ زاویه θ او د $A\hat{O}M'$ زاویه له $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ څخه عبارت ده چي د θ او $\frac{\pi}{2}-\theta$ زاویو مجموعه 90^o یا $\frac{\pi}{2}$ کېږي. څرنګه چي د $\overset{\Delta}{OHM}$ او $\overset{\Delta}{OH'M'}$ مثلثونه سره مساوي دي.

$$\overline{OH'} = \overline{OH}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta$$

$$\overline{H'M'} = \overline{HM}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta) = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)} = \frac{1}{\cot\theta} = \tan\theta$$

فعالیت

وښیاست چي: $\sec(90-\theta) = \csc\theta$ او $\csc(90-\theta) = \sec\theta$ دي.

لومړی مثال: که:

$$\sin 23^\circ = 0{,}3907 \qquad \cos 23^\circ = 0{,}9205 \qquad \tan 23^\circ = 0{,}4245$$
$$\cot 23^\circ = 2{,}356 \qquad \sec 23^\circ = 1{,}086 \qquad \csc 23^\circ = 2{,}559$$

وي، د 67° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل:

$$\cot 67^\circ = \tan 23^\circ = 0.4245 \qquad \sin 67^\circ = \cos 23^\circ = 0.9205$$
$$\sec 67^\circ = \csc 23^\circ = 2.559 \qquad \cos 67^\circ = \sin 23^\circ = 0.3907$$
$$\csc t67^\circ = \sec 23^\circ = 1.086 \qquad \tan 67^\circ = \cot 23^\circ = 2.356$$

فعاليت

که:

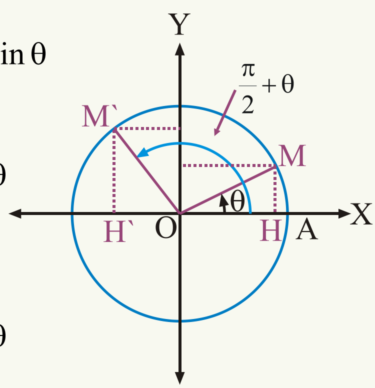
$$\sin 8^\circ \ 10' = 0.1421 \qquad \cos 8^\circ \ 10' = 0.9899$$
$$\tan 8^\circ \ 10' = 0.1435 \qquad \cot 8^\circ \ 10' = 6.968$$
$$\sec 8^\circ \ 10' = 1.010 \qquad \csc 8^\circ \ 10' = 7.040$$

وي، د $81^\circ \ 50'$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

د هغو زاويو مثلثاتي نسبتونه چې توپير يې $\frac{\pi}{2}$ يا 90° وي په لاندې ډول دي:

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = \sin[\frac{\pi}{2}-(-\theta)] = \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = \cos[\frac{\pi}{2}-(-\theta)] = \sin(-\theta) = -\sin\theta$$



$$\tan(\frac{\pi}{2}+\theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

$$\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

$$\csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

دويم مثال: د 120° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل

$$\sin 120^{\circ}=\sin(90^{\circ}+30^{\circ})=\cos 30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^{\circ}=\cos(90^{\circ}+30^{\circ})=-\sin 30^{\circ}=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^{\circ}=\tan(90^{\circ}+30^{\circ})=-\cot 30^{\circ}=-\sqrt{3}$$

$$\cot 120^{\circ}=\cot(90^{\circ}+30^{\circ})=-\tan 30^{\circ}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 120^{\circ}=\sec(90^{\circ}+30^{\circ})=-\csc 30^{\circ}=-2$$

$$\csc 120^{\circ}=\csc(90^{\circ}+30^{\circ})=\sec 30^{\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta \qquad \sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta \qquad \cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta \qquad \tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta)=\tan\theta \qquad \cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta$$

$$\sec(\frac{\pi}{2}-\theta)=\csc\theta \qquad \sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\csc\theta$$

$$\csc(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sec\theta \qquad \csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sec\theta$$

پوښتنې

1- د 135° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2- د 150° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

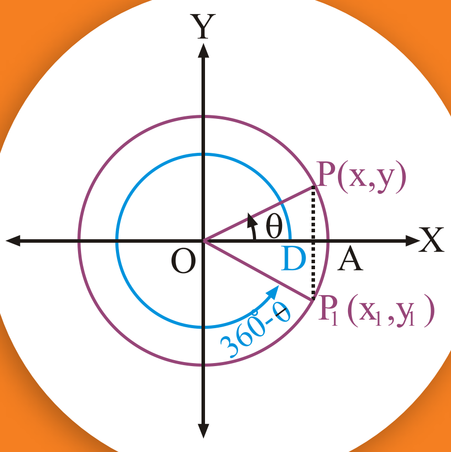
3- $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=?$

a) $\cos x$ b) $\sin x$ c) $-\cos x$ d) $-\sin x$

4- $\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=?$

a) $\tan\theta$ b) $-\tan\theta$ c) $\cot\theta$ d) $-\cot\theta$

د هغه زاویو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړیکي چي مجموعه یې 360° یا 2π وي.



آیا ښودلای شئ چي
$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta$ او
$\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$ اړیکي سمې
دي؟

په پورته شکل کې د $\overset{\Delta}{OPD}$ او $\overset{\Delta}{OP_1D}$ مثلثونو له مساوي والی څخه لرو چي:

$-y_1 = y \Rightarrow y_1 = -y$

$x_1 = x \quad |y_1| = |y|$

$\sin(360^\circ - \theta) = y_1 = -y = -\sin\theta$

$\cos(360^\circ - \theta) = x_1 = x = \cos\theta$

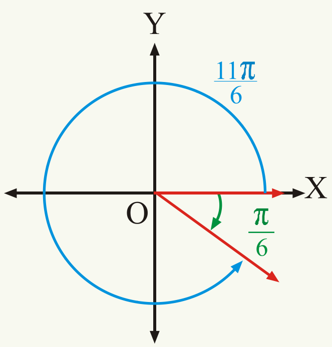
$$\tan(360^\circ - \theta) = \frac{\sin(360^\circ - \theta)}{\cos(360^\circ - \theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

فعالیت

په همدې ډول د θ او $360^\circ - \theta$ زاویو د $\sec, \cot$ او $\csc$ د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکي پیداکړئ او د θ او $(-\theta)$ زاویو مثلثاتي نسبتونو له اړیکو سره یې پرتله کړئ.

مثال: د 330° یا $\frac{11\pi}{6}$ راډیانه زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:



$$\sin\frac{11\pi}{6}=\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})=\sin 330^\circ=\sin(360^\circ-30^0)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{11\pi}{6}=\cos(2\pi-\frac{\pi}{6})=\cos 330^\circ=\cos(360^\circ-30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{11\pi}{6}=\tan(2\pi-\frac{\pi}{6})=\tan 330^\circ=\tan(360^\circ-30^\circ)=-\tan 30^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot\frac{11\pi}{6}=\cot(2\pi-\frac{\pi}{6})=\cot 330^\circ=\cot(360^\circ-30^\circ)=-\cot 30^\circ=-\sqrt{3}$$

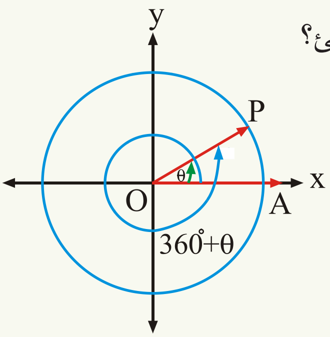
$$\sec\frac{11\pi}{6}=\sec(2\pi-\frac{\pi}{6})=\sec 330^\circ=\sec(360^\circ-30^\circ)=\sec 30^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc\frac{11\pi}{6}=\csc(2\pi-\frac{\pi}{6})=\csc 330^\circ=\csc(360^\circ-30^\circ)=-\csc 30^\circ=-2$$

فعاليت

د 315° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

د کوټرمينل زاويو مثلثاتي نسبتونه:



- آيا $\sin 450^\circ$، $\tan 390^\circ$ او $\csc 450^\circ$ پيدا کولای شئ؟
- آيا $\sin 90^\circ$، $\sin 450^\circ$ او $\sin 790^\circ$ سره برابر دي ؟ ولې؟

په معياري حالت کې د θ حاده زاويې او $360^\circ+\theta$ زاويو دويمې ضلعې يو پر بل پرتې دي، نو:

$\sin(360^\circ+\theta)=\sin\theta$ $\qquad$ $\cos(360^\circ+\theta)=\cos\theta$

$\tan(360^\circ+\theta)=\tan\theta$ $\qquad$ $\cot(360^\circ+\theta)=\cot\theta$

$\csc(360^\circ+\theta)=\csc\theta$ $\qquad$ $\sec(360^\circ+\theta)=\sec\theta$

لومړی مثال: د 405° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 405^\circ = \sin(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 405^\circ = \cos(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 405^\circ = \tan(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan(360^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\cot 405^\circ = \cot(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cot(360^\circ + 45^\circ) = \cot 45^\circ = 1$$

$$\sec 405^\circ = \sec(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sec(360^\circ + 45^\circ) = \sec 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\csc 405^\circ = \csc(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \csc(360^\circ + 45^\circ) = \csc 45^\circ = \sqrt{2}$$

دویم مثال: د 1500° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin 1500^\circ = \sin(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 1500^\circ = \cos(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 1500^\circ = \tan(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot 1500^\circ = \cot(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 1500^\circ = \sec(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sec 60^\circ = 2$$

$$\csc 1500^\circ = \csc(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

دریم مثال: د 900° او -930° زاویو sin ، cos او tan پیدا کړئ.

حل

$$-930^\circ + 3\cdot 360^\circ = 150^\circ$$

$$\sin(-930^\circ) = \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

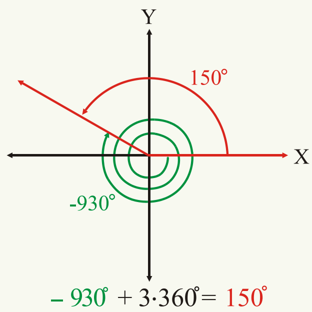
$$\cos(-930^\circ) = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

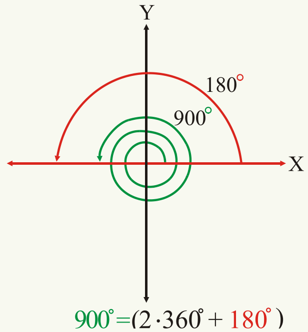
$$\tan(-930^\circ) = \tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = \tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 900^\circ = \sin(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \sin 180^\circ = 0$$

$$\cos 900^\circ = \cos(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \cos 180^\circ = -1$$

$$\tan 900^\circ = \tan(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \tan 180^\circ = 0$$





خلورم مثال: د $-\frac{5\pi}{2}$ او $\frac{7\pi}{3}$ زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

$$-\frac{5\pi}{2} = (-2\pi - \frac{\pi}{2})$$

حل:

$$\sin\frac{7\pi}{3} = \sin(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{7\pi}{3} = \cos(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{7\pi}{3} = \tan(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\cot(\frac{7\pi}{3}) = \cot(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin(-\frac{5\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$

$$\cos(-\frac{5\pi}{2}) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\tan(-\frac{5\pi}{2}) = \tan(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{\cos(-\frac{\pi}{2})} = \frac{-1}{0}$$ تعريف شوی نه دی

$$\cot(-\frac{5\pi}{2}) = \cot(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\cos(-\frac{\pi}{2})}{\sin(-\frac{\pi}{2})} = \frac{0}{-1} = 0$$

فعالیت

د $\frac{7\pi}{3}$ او $(-\frac{5\pi}{2})$ زاویو نور دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin(2\pi-\theta)=\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(2\pi-\theta)=\cos(360^\circ-\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(2\pi-\theta)=\tan(360^\circ-\theta)=-\tan\theta$$
$$\cot(2\pi-\theta)=\cot(360^\circ-\theta)=-\cot\theta$$
$$\sec(2\pi-\theta)=\sec(360^\circ-\theta)=\sec\theta$$
$$\csc(2\pi-\theta)=\csc(360^\circ-\theta)=-\csc\theta$$

$$\sin(2\pi+\theta)=\sin(360^\circ+\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(2\pi+\theta)=\cos(360^\circ+\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(2\pi+\theta)=\tan(360^\circ+\theta)=\tan\theta$$
$$\cot(2\pi+\theta)=\cot(360^\circ+\theta)=\cot\theta$$
$$\sec(2\pi+\theta)=\sec(360^\circ+\theta)=\sec\theta$$
$$\csc(2\pi+\theta)=\csc(360^\circ+\theta)=\csc\theta$$

پوښتنې

1- د 480^{o} او 390^{o} زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2- د 600^{o} او 300^{o} زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

3- د 1830^{o} او د $(1095^{\circ}\ 20')$ زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

4- د $\frac{25\pi}{6}$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

5- د $\frac{5\pi}{3}$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

6- د $\frac{41\pi}{6}$، $\frac{4\pi}{3}$ او $\frac{3\pi}{4}$ زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

7- د -300^{o}، 780^{o} او 420^{o} زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

8- $\cos(-3\pi) = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

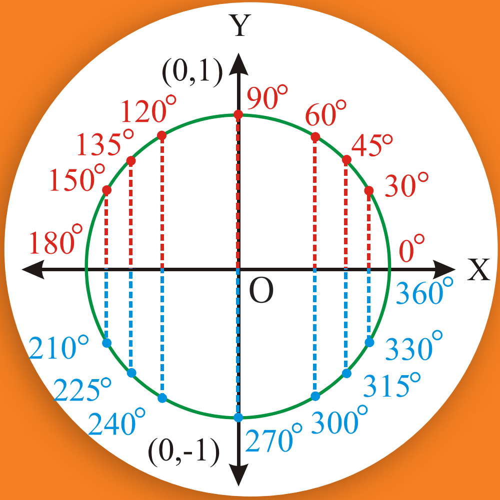
9- $\cos(-15\pi) = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) درې واړه سم نه دي.

10- $\sin(-1110^{\circ}) = ?$

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

د مثلثاتي تابع ګانو ګراف



- آیا کولای شئ وواياست چې د $f(x) = \sin x$ او $f(x) = \cos x$ د تابعګانو د تناوب دوره څومره ده؟
- آیا ویلای شئ چې د $f(x) = \sin x$ او $f(x) = \cos x$ د توابعو domain کوم عددونه دي؟

د $f(x) = \sin x$ تابع د ګراف رسمول (graph of the sine function):

د $f(x) = \sin x$ د تابع د تعریف ناحیه (domain) د ټولو حقیقي عددونو سټ دی او Range يې $[-1,1]$ دی. د دې تابع د تناوب دوره 2π ده، ځکه پوهيږئ چې د یوې تابع د تعریف ساحه ټول هغه حقیقي عددونه (Real numbers) دي چې تابع په کې تعریف شوې وي.

د هر حقیقي عدد x لپاره یوه د x راډیان زاویه او له مثلثاتي دایرې سره د x راډیان د زاویې د تقاطع ټکی، هر وخت تعریف شوی دی. که x د راډیان په حساب وي، ددې ټولو زاویو اندازه $2k\pi + x$ راډیان ده، نو د sine او cosine د تابع ګانو د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

څرنګه چې sinx او cosx په مثلثاتي دایره باندې د یوه ټکي وضعیه کمیات دي، نو د $f(x) = y = \sin x$ او $f(x) = y = \cos x$ د تابع ګانو د Range د (1) او (-1) تر منځ دي، یا د $[-1,1]$ انټروال د $y = \sin\theta$ او $y = \cos\theta$ د تابع ګانو Range دی.

فعالیت

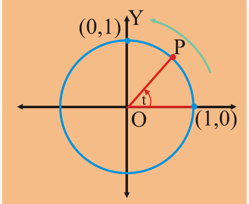
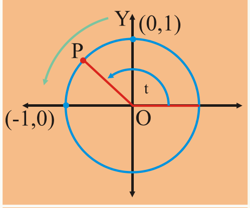
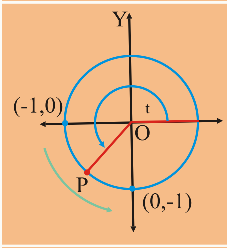
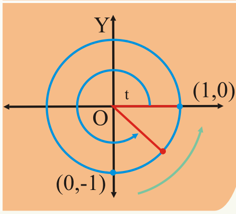
وښیاست چې $-1 \leq \sin\theta, \cos\theta \leq 1$ دی.

باید په یاد ولرو چې د f تابع ته متناوبه تابع ویل کیږي، که چیرې د t یو عدد د صفر خلاف موجود وي، په دې شرط چې که لومړی $x \in D_F$ وي $x+t$ او $x-t$ هم د f د تابع د تعریف په ساحه (domain) کې شامل وي او $f(x+t) = f(x)$ وي.

تر ټولو کوچنی داسې عدد، لکه: (t) چې د $f(x+t) = f(x)$ په اړیکه کې صدق وکړي. دا د (t)

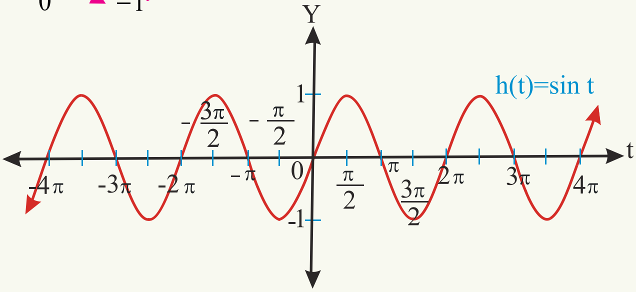
عدد د f د تابع د اصلي تناوب په نوم یادېږي. که (t) د f د تابع د تناوب دوره وي. نو (-t) هم د f د تابع د تناوب دوره ده. څرنګه چې پوهېږئ $\sin(x+2K\pi)=\sin x$ او $\cos(x+2K\pi)=\cos x$ دی چې K یو تام عدد دی، نو د sinx او cosx توابع متناوبې توابع دي او تر ټولو کوچنی عدد چې په پورتنیو اړیکو کې صدق کوي 2π دی، نو د دې دواړو توابعو اصلي تناوب 2π دی.

له شکل سره سم په معیاري حالت کې یو د $\hat{t}$ راډیان زاویه په پام کې ونیسئ په داسې حال کې چې د t د زاویې دویمه ضلع مثلثاتي دایره د p په ټکي کې قطع کوي، نو د p د ټکي د y مختصه له sin t څخه عبارت ده. $h(t)=\sin t$ د t او sint تغیرات په لاندې جدول او شکل کې وګورئ:

اړونده شکل	sin t	د P د ټکي حرکت	د t په قیمت کې تغیر
	له صفر څخه تر یوه پورې تزاید کوي	له (1,0) څخه تر (0,1)	له 0 څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې
	له یوه څخه تر صفره پورې تناقص کوي	له (0,1) څخه تر (−1,0)	له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې
	له صفره څخه تر 1- پورې تناقص کوي	له (−1,0) څخه تر (0,−1)	له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې
	له 1- څخه تر صفره پورې تزاید کوي	له (0,−1) څخه تر (1,0)	له $3\frac{\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې

په همدې ډول په هر 2π کې تکرارېږي په نتیجه کې $\sin(t \pm 2\pi) = \sin t$ دی.
لاندې جدول او شکل وګورئ:

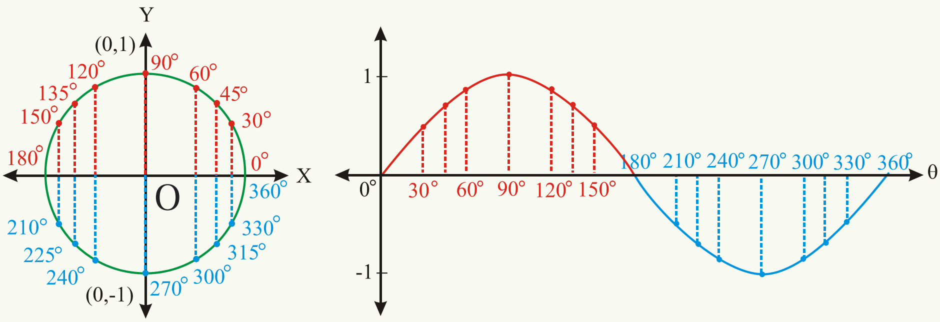
t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$h(t) = \sin t$	0	1	0	-1	0



او یا کولای شو، که د یو دوران زاویې د درجې په حساب وي، د sin t تغیرات په لاندې جدول او شکل کې وښایو:

$h(t) = \sin t$

t	واقعي	تقریبي
0°	0	0.00
30°	$\frac{1}{2}$	0.50
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
90°	1	1.00
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
150°	$\frac{1}{2}$	0.50
180°	0	0.00
210°	$-\frac{1}{2}$	−0.50
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	−0.71
240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−0.87
270°	-1	−1.00
300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−0.87
315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	−0.71
330°	$-\frac{1}{2}$	−0.50
360°	0	0.00



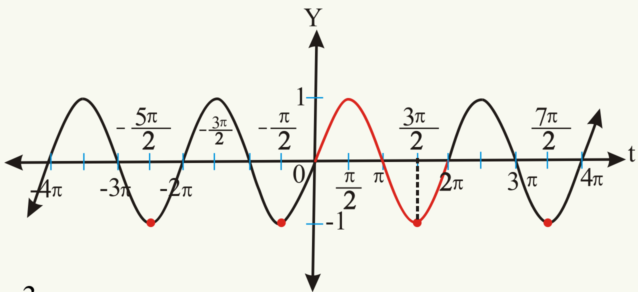
دي ته په پام سره چې sint د تابع د تناوب دوره 2π ده، نو $\sin(t\pm 2\pi)=\sin t$ دی، نو د $\sin t$ د تابع گراف په $[0,2\pi]$، $[2\pi,4\pi]$، $[4\pi,6\pi]$، $[-2\pi,0]$ او داسي نورو انټروالوکې يو شان دی.

فعالیت

په $4\pi,\ 2\pi,\ \pi,\ 0,\ -\pi,\ -2\pi,\ -3\pi$ او -4π کې د sin t د تابع قیمتونه پیدا کړئ.

لومړی مثال: د t هغه ټول قیمتونه وښیاست چې د sin t قیمت په کې (-1) وي.

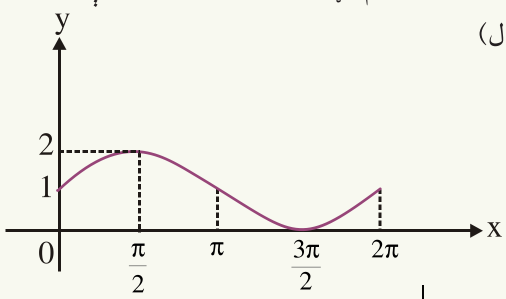
حل: څرنگه چې د sint قیمت د (1) او (-1) تر منځ دی او په هر 2π کې په افقي محور باندې تکراريږي، نو بې شمېره قیمتونه شته چې په هغه کې د sint قیمت 1 - دی. د نمونې په ډول څو ټکي په سور رنگ په شکل کې ښودل شوي دي.



د sint په گراف کې له صفر څخه تر 2π پورې يوازې يو ټکی(نقطه) د $(\frac{3\pi}{2},-1)$ شته چې په سره رنگ ښودلی شوي دی. ټول هغه قیمتونه چې sint په کې (-1) دی، له $t=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ څخه عبارت دي چې k يو تام عدد دی.

دویم مثال: د $y = \sin x + 1$ تابع گراف په $[0,2\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

حل: ددې لپاره د تابع د تعریف ساحه $[0,2\pi]$ او Range يې $[0,2]$ دی، ددې تابع د گراف د رسمولو لپاره همدا بس دی چې د $y = \sin x$ گراف رسم کړو او د یوه واحد په اندازه يې د Y پر محور پورته خوا ته انتقال کړو.(عمودی انتقال)



x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y = \sin x + 1$	1	2	1	0	1

د sine او cosine د تابع گانو پریود او لمن(Amplitude):

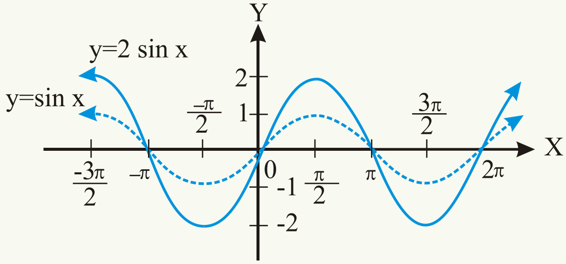
که $b > 0$ وي د $f(t) = \sin bt$ او $g(t) = \cos bt$ گرافونه، د صفر او 2π تر منځ یوه دوره(Cycle) جوړوي، ددې دواړو تابع گانو پریود $\frac{2\pi}{b}$ دی($b > 0$). د مثال په ډول د $y = \cos 3t$ پریود $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{3}$ دی او د $y = \sin \frac{1}{2} t$ تابع پریود $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ دی او د $y = a\sin bt$ او $y = a\cos bt$ د تابعگانو لمن د $|a|$ دی($a \neq 0$)، د مثال په ډول د $y = -2\sin 4t$ لمن $|a| = |-2| = 2$ او پریود يې $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ دی.

دریم مثال: د $y = 2\sin x$ تابع گراف رسم او د $y = \sin x$ د تابع له گراف سره يې پرتله کړئ.

حل: د دې تابع گراف توپیر د $y = \sin x$ د تابع له گراف سره دا دی چې $-2 \leq y \leq 2$ دی چې د 2 عدد ته لمن(amplitude) وايي. ځکه چې د $|2| = 2$ دی. ددې تابع پریود هم 2π

دی، لاندې جدول او شکل وګورئ:

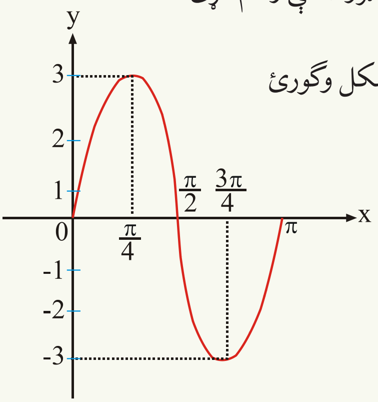
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	0	1	0	-1	0
2 sin x	0	2	0	-2	0



خلورم مثال: د $y = 3\sin 2x$ تابع ګراف په $[0,\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

حل: د دې تابع پریود $\frac{2\pi}{2} = \pi$ دی، لاندې جدول او شکل وګورئ

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
2x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
sin 2x	0	1	0	-1	0
3 sin 2x	0	3	0	-3	0



د sint د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، د sint د تابع ګراف د y محور په (0،0) او د X محور په (0.0)، π، 2π، 3π، 4π ... او $-\pi$، -2π، -3π -4π او نورو کې قطع

کوي، د $\sin t$ تابع له صفر څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې متزایده، له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې متناقصه، له π

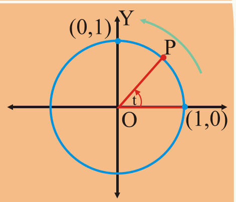
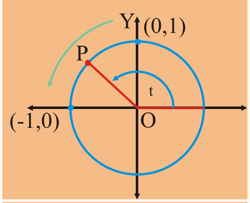
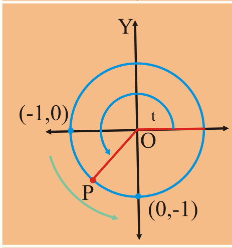
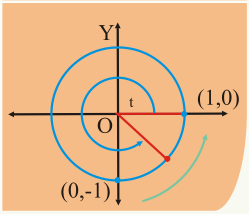
څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې متناقصه او له $\frac{3\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې متزایده ده.

د $f(t) = \cos t$ د تابع ګراف (Graph of the cosine function)

د دې تابع د تعریف ساحه(domain) هم د ټولو حقیقي عددونو سټ دی او Range یې $[-1,1]$

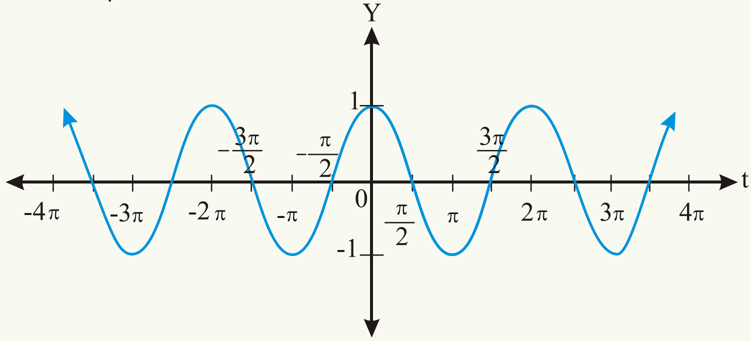
دی، د cosx د تابع د تناوب دوره هم 2π ده، له شکل سره سم په معیاري حالت(Standard position) کې د $\hat{t}$ رادیان یوه زاویه په پام کې ونیسئ چې د $\hat{t}$ د زاویې دویمه ضلع مثلثاتي دایره د p په ټکي کې قطع کوي، نو د p د ټکي د x مختصه د cost څخه عبارت ده. $f(t) = \cos t$

د تابع ګراف د رسمولو لپاره لاندې جدول او شکلونه وګورئ.

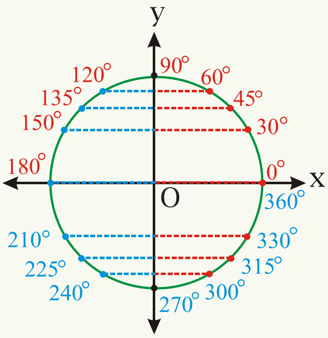
اړونده شکل	cost یا د p د ټکي د x مختصه	د P د ټکي حرکت	د t په قیمت کې تغیر
	له یوه څخه ترصفره پورې تناقص کوي	له (1,0) څخه تر (0,1) پورې	له 0 څخه تر $\frac{\pi}{2}$
	له صفر څخه تر -1 پورې تناقص کوي.	له (0,1) څخه تر (−1,0) پورې	له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π
	له -1 څخه تر صفره پورې تزاید کوي.	له (−1,0) څخه تر (0,−1) پورې	له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$
	له صفر څخه تر یوه پورې تزاید کوي	له (0,−1) څخه تر (1,0) پورې	له $3\frac{\pi}{2}$ څخه تر 2π

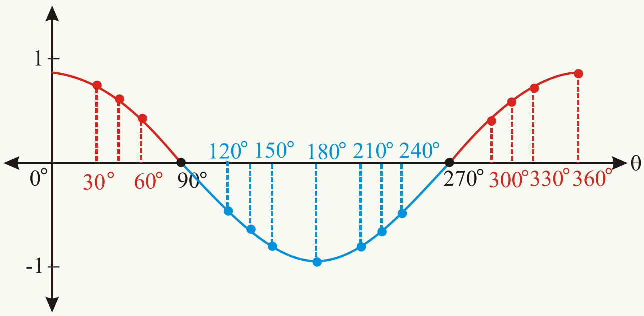
په همدې ډول په هر 2π کې تکراريږي. په نتيجه کې $\cos(t \pm 2\pi) = \cos t$ دی. لاندې جدول او شکل وګورئ.

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(t) = \cos t$	1 ↘	0 ↘	−1 ↗	0 ↗	1



کولای شو، د درجې په حساب د $f(t) = \cos t$ تابع ګراف هم رسم کړو:





د $f(t) = y = \cos t$ تابع د تناوب دوره 2π ده، څکه چې د cost د تابع ګراف د $[0,2\pi]$، $[2\pi,4\pi]$، $[4\pi,6\pi]$ او $[-2\pi,0]$ او داسې نورو کې يو شان دی.

د cost د تابع د تعريف ساحه د حقيقي عددونو سټ او Range يا د y قيمت يې د 1 او -1 تر منځ دی، يا د $[-1,1]$ انټروال د cost د تابع Range دی.

$f(t) = \cos t$

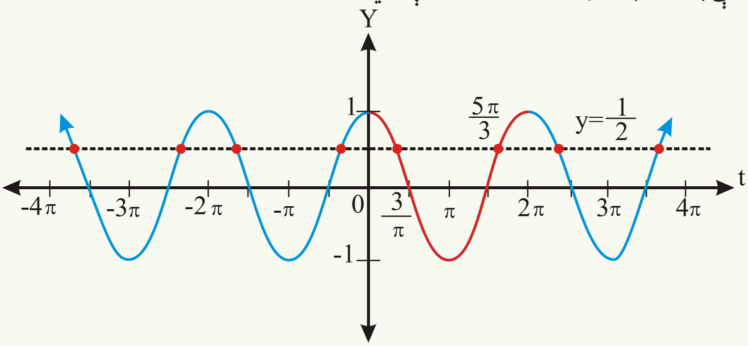
t	واقعي	تقریبي
0°	1	1.00
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
60°	$\frac{1}{2}$	0.50
90°	0	0.00
120°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
135°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
150°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
180°	-1	-1.00
210°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
240°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
270°	0	0.00
300°	$\frac{1}{2}$	0.50
315°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.711
330°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
360°	1	1.00

فعالیت

د $g(t) = \cos t$ تابع ګراف د t په کومو قیمتونو کې د y محور قطع کوي؟

لومړی مثال: د t ټول هغه قیمتونه وښیاست چې د cost د تابع قیمت په کې له $\frac{1}{2}$ سره مساوي وي.

حل: څرنګه چې بې شمېره زاويې شته دی چې په هغه قیمتونو کې $y=\cos t=\frac{1}{2}$ دي، په شکل کې څو ټکي د نمونې په ډول په سره رنګ ښودل شوي دي.



د $[0,2\pi]$ په انټروال کې داسې دوه ټکي شته چې $\cos t=\frac{1}{2}$ شي چې له $(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2})$ او $(\frac{5\pi}{3},\frac{1}{2})$ څخه عبارت دي. ټول هغه قیمتونه چې په هغو کې $\cos t=\frac{1}{2}$ وي، له $t=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ یا $t=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$ څخه عبارت دي. چې k یو تام عدد دی.

د sin او cos تابع ګانو د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، $y=\cos t$ تابع له صفره څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې متناقصه او له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π هم متناقصه ده. لیکن له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ متزایده او له $\frac{3\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې هم متزایده ده. د $y=\sin t$ او $y=\cos t$ ، د تابع ګانو پریود 2π دی، په دې معنا چې: $\sin(t\pm2\pi)=\sin t$, $\cos(t\pm2\pi)=\cos t$ دی.

د $f(t)=\sin t$ تابع طاقه او $f(t)=\cos t$ تابع یوه جفته تابع ده، ځکه چې: $\sin(-t)=-\sin t$ او $\cos(-t)=\cos t$ دی یا د $\sin t$ د تابع ګراف نظر مبداء ته متناظر او د $\cos t$ تابع ګراف نظر د y محور ته متناظر دی.

پوښتنې

1- د لاندې تابع ګانو ګرافونه په راکړل شوو انټروالونو کې رسم کړئ.

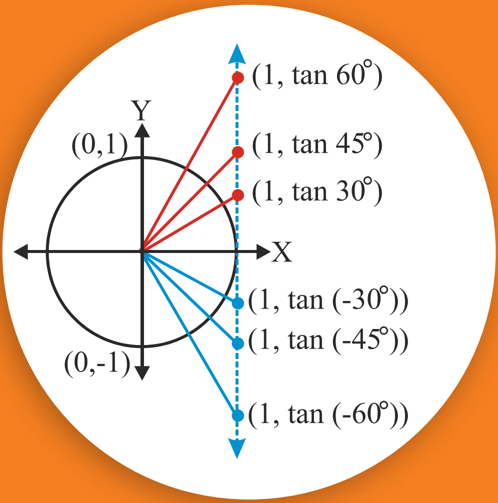
$f(t)=\sin t:[2\pi,6\pi]$ $\qquad$ $g(t)=\cos t:[\pi,3\pi]$

2- د $[-2\pi,6\pi]$ په انټروال کې د t د کوم قیمت لپاره $\sin t=1$ دی؟

3- د $[-2\pi,6\pi]$ په انټروال کې د t دکوم قیمت لپاره $\cos t=0$ دی؟

4- د $g(t)=-\frac{1}{2}\sin t$ د تابع ګراف په $[-2\pi,6\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

د ټانجانټ د تابع ګراف



آیا پوهېږئ چې د tan تابع یوه متزایده تابع ده؟

څرنګه چې $\tan t = \frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\cos t}$ دی، په دې شرط چې $\cos t \neq 0$ وي، نو د tan تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، پرته له هغو زاویو څخه چې cos یې صفر وي، د $\frac{\pi}{2}$ او $\frac{3\pi}{2}$ او یا $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ او $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ د زاویو کوساینونه صفر دي.

څرنګه چې د $\frac{\pi}{2}$ زاویې د دویمې ضلعې د تقاطع ټکی له مثلثاتي دایرې سره د $(0,1)$ ټکی دی، نو د $\frac{\pi}{2}$ زاویې سره د یو پوره دوران (2π) په جمع کولو سره د $\ldots \frac{9\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2} \ldots$ زاویې په لاس راځي چې ددې زاویو د tan قیمتونه تعریف شوي نه دي او د $t = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ مستقیم خطونه د tan د تابع عمودي مجانبونه دي.

په همدې ډول د $(0,-1)$ ټکی د $\frac{3\pi}{2}$ زاویې پر دویمه ضلع واقع دی، د $\frac{3\pi}{2}$ له زاویې سره د یو پوره دوران (2π) له جمع کولو څخه د $\ldots \frac{11\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2} \ldots$ زاویې په لاس راځي چې د tan د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دي.

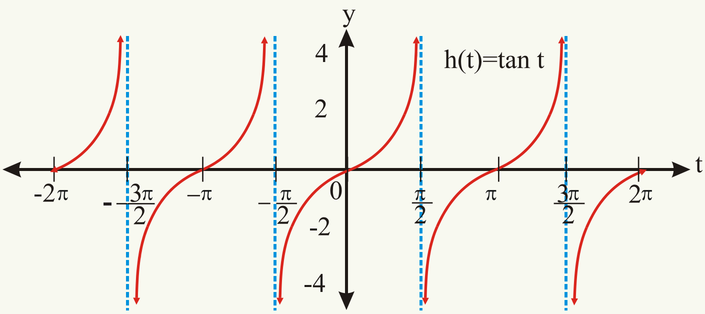
یا د tan د تابع د تعریف په ناحیه(domain) کې ټول حقیقي عددونه شامل دي پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه، او یا $\{\, IR - \{t / t \in IR, t = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ او د ټانجانټ د تابع د Range د

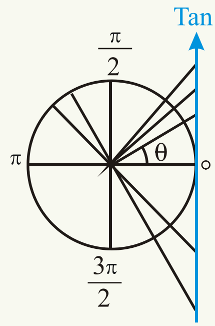
ټولو حقیقي عددونو سټ دی. د ټانجانټ د تابع پریود π دی. د t راډیان زاویې لپاره لرو چې:

$\tan(t \pm \pi) = \tan t$ دی. څه وخت چې د $\hat{t}$ زاویه له صفره تر $\frac{\pi}{2}$ پورې تزاید وکړئ، نو $\tan t$ هم له صفره څخه تر $+\infty$ پورې تزاید کوي ($\tan\frac{\pi}{2}$ تعریف شوی نه دی). په دویمه ربع کې هم څه وخت چې د t زاویه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې تزاید وکړي، $\tan t$ هم له $-\infty$ څخه تر صفره پورې تزاید کوي.

په همدې ډول په دریمه ناحیه کې هغه وخت چې د $\hat{t}$ زاویه له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې تزاید وکړي، د $\hat{t}$ د زاویې ټانجانټ له صفره څخه تر $+\infty$ پورې تزاید کوي. په څلورمه ناحیه کې د $\hat{t}$ د زاویې ټانجانټ له $-\infty$ څخه تر صفره پورې تزاید کوي. لاندې جدول د ټانجانټ د تابع تحول ښکاره کوي، همدارنګه د دې تابع تحول په لاندې شکلونو کې ښودل شوی دی:

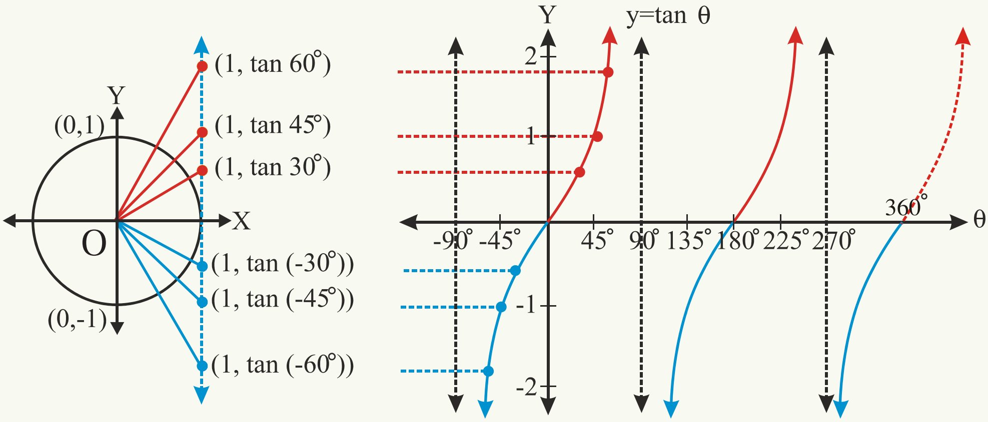
t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$3\pi/2$		2π
$\tan t$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0





که θ د درجې په حساب وي، د ټانجانټ تابع قیمتونه او شکل په لاندې ډول وګورئ.

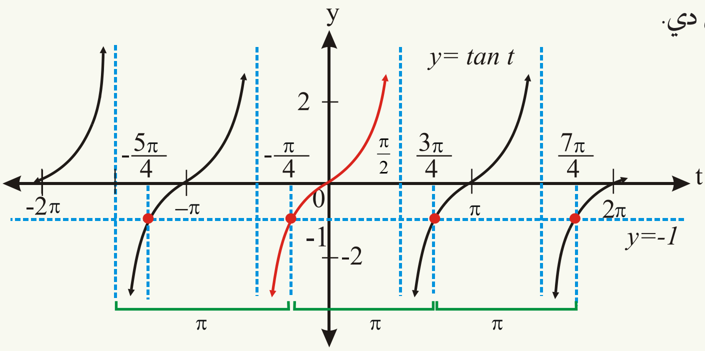
	θ	-90° 90°	-60° 120°	-45° 135°	-30° 150°	0° 180°	30° 210°	45° 255°	60° 240°
tan θ	حقیقي	تعریف شوی نه دی	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
	تقریبي	تعریف شوی نه دی	-1.73	-1	-0.58	0	0.58	1	1.73



خرنگه چې د $(\pi,2\pi)$ او د $(0,\pi)$ په فاصله کې د ټانجانټ د تابع تغيرات يو شی دي، نو د tan تابع پريود π دی او د tan تابع يوه متزايده تابع ده. له بلې خواکه $b>0$ وي، د $f(t)=\tan bt$ تابع د $\frac{\pi}{2}$ او $-\frac{\pi}{2}$ تر منځ يوه دوره(Cycle) جوړوي، د دې تابع پريود $\frac{\pi}{b}$ دی. د مثال په ډول د $f(t)=\tan 2t$ پريود $\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$ دی.

مثال: د t ټول هغه قيمتونه پيدا کړئ چې $\tan t=-1$ وي.

حل: خرنگه چې د $\tan t$ قيمتونه د π په فاصله کې تکرارېږي، نو د t بې شمېره قيمتونه شته چې $y=\tan t$ له 1 - سره مساوي وي چې په لاندې شکل کې څو ټکي د نمونې په ډول ښودل شوي دي.



خرنگه چې د $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ په انټروال کې يوازې د $(-\frac{\pi}{4},-1)$ يو ټکی لري، نو د t ټول قيمتونه چې $\tan t=-1$ دي مساوي دی په: $t=-\frac{\pi}{4}+K\pi$ (K يو تام عدد دی).

د tan تابع هر وخت متزايده ده او پرته د $\frac{\pi}{2}$ د طاق مضرب له زاويو څخه پرته په ټولو حقيقي عددونو کې تعريف شوې ده. او د تناوب دوره يې π ده، ځکه چې: $\tan(t \pm \pi) = \tan(t)$.

څرنګه چې $\tan(-t) = -\tan t$ دی، نو $y = \tan t$ يوه طاقه تابع ده او د $\frac{\pi}{2}$ په تام مضرب کې عمودي مجانب هم لري.

د sine ، cosine او tangent تابع ګانو د مشخصو لنډيز:

تابع	سمبول	Domain	Range	پريود	جفته / طاقه
$\sin e$	$f(t) = \sin t$	د ټولو حقيقي عددونو سټ	ټول حقيقي عددونه د 1 او 1 - ترمنځ	2π	طاقه
$\cos ine$	$f(t) = \cos t$	ټول حقيقي عددونه	ټول حقيقي عددونه د 1 او 1 - ترمنځ	2π	جفته
$\tan gent$	$f(t) = \tan t$	ټول حقيقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه	ټول حقيقي عددونه	π	طاقه

يا په بل عبارت:

$D_{\sin} = D_{\cos} = IR$ $\qquad R_{\sin} = R_{\cos} = [-1,1]$

$D_{\tan} = \{x \in IR \quad : \quad \cos x \neq 0\}$

پوښتني

1 – د t د زاويې په کوم قيمت د $\tan t$ د تابع قيمت په $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ انټروال کې له صفره کوچنی دی؟

2 – د $y = 3\tan\theta$ تابع ګراف رسم کړئ.

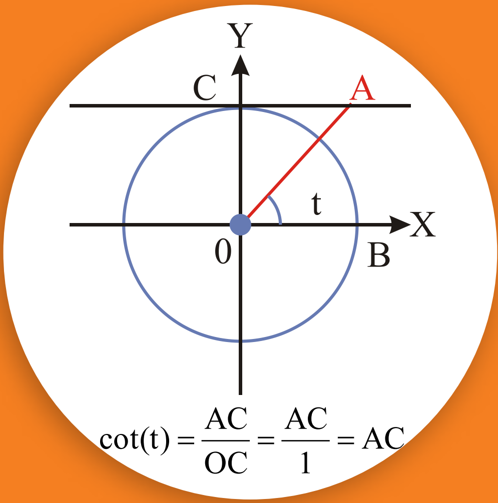
3 – د $\tan\theta$ تابع پريود مساوي دی په:

a) 2π b) π c) 3π d) دري واړه سم نه دي

4 – که د θ زاويه له 0° څخه تر 90° پورې تحول وکړي، د $\tan\theta$ تحول عبارت دی له:

a) $-\infty$ له 1- څخه تر b) $+\infty$ له صفر څخه تر c) $+\infty$ له $-\infty$ څخه تر

د کوټانجانټ د تابع ګراف



- آیا د کوټانجانټ د تابع د تناوب دوره پيژنئ؟
- که $\sin t = 0$ وي، آيا $\cot(t)$ تعريف شوی دی؟ که نه، ولې؟

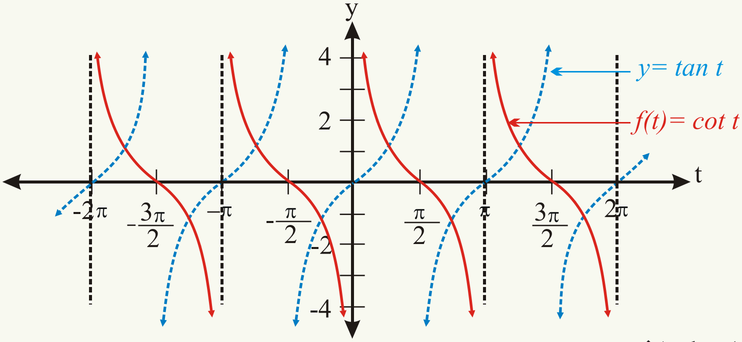
څرنګه چې $\cot(t)=\frac{\cos t}{\sin t}$ دی، که $\sin t = 0$ وي، $\cot(t)$ تعريف شوی نه دی چې t يو تام عدد وي.

د cot تابع د تعريف ساحه (domain) ټول حقيقي عددونه دي پرته د π له تام مضرب څخه، يا په بل عبارت $IR-\{t/t\in IR\,, t=k\pi, k\in z\}$ يا $dom_{cot}=\{t\in IR/\sin t\neq 0\}$ او د دې تابع Range ټول حقيقي عددونه دي.

د $f(t)=\cos(t)$ د تابع ګراف د π په تام مضرب کې عمودي مجانب (Vertical asymptotes) لري $(t=k\pi)$ چې k يو تام عدد دی.

څه وخت چې د t زاويه له صفره تر $\frac{\pi}{2}$ پورې زياته شي، د $\cot(t)$ قيمت له $+\infty$ څخه تر صفره پورې کمېږي ($\cot 0°$ نه دی تعريف شوی) په دويمه ناحيه کې څه وخت چې د t زاويه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې زياته شي، $\cot(t)$ له صفره تر $-\infty$ پورې کمېږي (تناقص کوي). دې ته په پام سره چې د cot د تابع د تناوب دوره π ده، نو په دريمه او څلورمه ناحيه کې د $\cot(t)$ د تابع تغيرات د لومړۍ او دويمې ناحيې په شان دي. پورتنۍ حقيقت په لاندې جدول او شکل کې ليدلای شئ.

t	0		$\pi/2$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cot t$	‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$



د secant(t) تابع گراف (Graph of the secant Function)

د sec (t) او cos (t) گرافونه یو له بله سره څه اړیکه لري؟

د $f(t)=\sec(t)$ د تابع گراف د $\cos t$ د تابع له گراف سره معکوسه اړیکه لري، ځکه چې

$\sec(t)=\dfrac{1}{\cos(t)}$ دی. که $\sec t$ د $\dfrac{1}{\cos t}$ په شکل په پام کې ونیسو، څه وخت چې د t زاویې

قیمت له صفر څه تر $\dfrac{\pi}{2}$ یا $90°$ پورې زیات شي، د $\cos t$ قیمت له (1) څخه صفر ته نژدې

کېږي، د $\dfrac{1}{\cos t}$ یا $\sec t$ قیمت له 1 څخه تر $+\infty$ زیاتېږي، که $t=90°$ شي، $\sec t$ تعریف

شوی نه دی، که t له $90°$ لږ څه زیاته شي د $\sec t$ قیمت $-\infty$ کېږي او په $t=\pi=180°$

کې د -1 سره مساوي کېږي. په همدې ډول که t له $180°$ څخه تر $270°$ پورې زیاته شي، نو د

$\cos t$ قیمت له -1 څخه صفر ته نژدې کېږي او $\sec(t)$ له -1 څخه تر $-\infty$ پورې کمېږي.

په $t=\dfrac{3\pi}{2}=270°$ کې د $\sec t$ قیمت غیر معین کېږي په همدې ډول، څه وخت چې د t

قیمت له $270°$ څخه تر $360°$ زیات شي، نو $\cos(t)$ له صفر څخه تر یوه پورې قیمت اخلي

او $\sec(t)$ د $+\infty$ څخه تر (1) پورې تناقص کوي. لیدل کېږي چې:

$$\text{Domain } \sec t=\text{IR}-\{t\,|\,t=(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in z\}$$

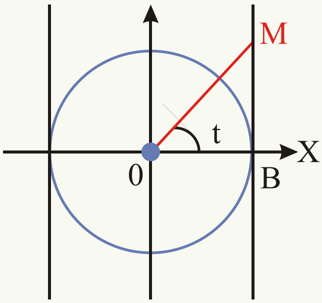
او $\text{Range } \sec(t)=\text{IR}-\{t\,|\,-1\le t\le 1\}$ یا ټول حقیقي عددونه پرته د $[-1,1]$ له انټروال

څخه یا په بل عبارت د $f(t)=\sec(t)$ تابع د تعریف ساحه $(Domain)$ د ټولو حقیقي عددونو

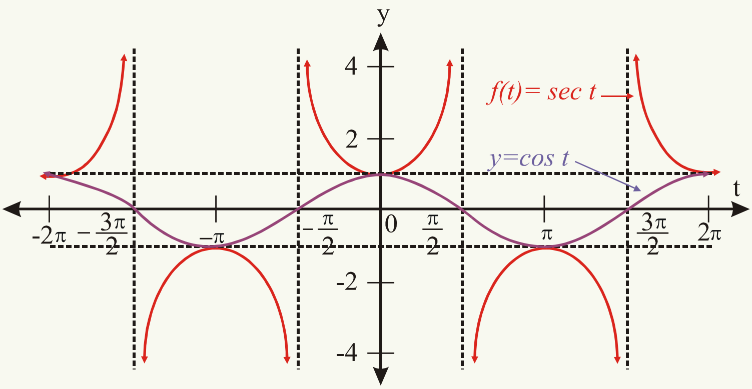
سټ دی پرته د $\dfrac{\pi}{2}$ د طاق مضرب څخه او د $f(t)=\sec(t)$ د تابع Range ټول حقیقي عددونه

دي چې لوی یا مساوي د یو او یا کوچنی یا مساوي له -1 وي، لکه: ځکه چې لیدل کېږي د

$\sec(t)$ تابع پریود هم 2π دی او د $f(t)=\sec(t)$ تابع د $t=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ کې عمودي مجانبونه لري چې k یو تام عدد دی.



$$\sec t=\frac{\overline{OM}}{OB}=\frac{\overline{OM}}{1}=\overline{OM}$$



t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
t	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	360
$F(t)=\sec t$	1 ↗ $+\infty$	‖ $-\infty$ ↗	-1 ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	1

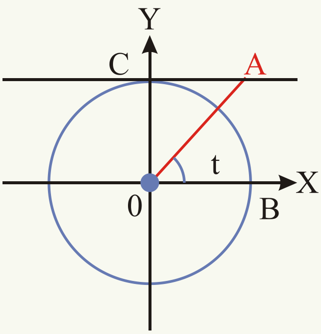
فعالیت

د $f(t)=\frac{4}{3}\sec(t)$ تابع گراف رسم کړئ.

د cosecant د تابع گراف (Graph of the cosecant Function)

د $f(t)=\sin(t)$ تابع گراف د $f(t)=\csc(t)$ د تابع له گراف سره څه اړیکه لري؟

څرنگه چې $\csc t=\dfrac{1}{\sin t}$ دی، $\sin t$ او $\csc t$ یو د بل معکوس دي. څه وخت چې $\sin(t)=0$ وي، $\csc t$ تعریف شوی نه دی، د $f(t)=\csc(t)$ د تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه دي پرته له هغو زاویو څخه چې د π تام مضرب وي، (هغه زاویې چې sine یې صفر وي) چې په دې قیمتونو کې عمودي مجانبونه هم لري او د $f(t)=\csc(t)$ د تابع Range ټول هغه حقیقي عددونه دي چې لوی یا مساوي د یو، کوچنی یا مساوي له (-1) سره وي. او ددې تابع پریود هم 2π دی.



څه وخت چې د t زاویه له $0°$ څخه تر $90°$ پورې زیاته شي، نو $\sin t$ له صفر څخه تر (1) پورې زیاتېږي (تزاید کوي) او $\csc(t)$ له $+\infty$ څخه تر (1) پورې کمېږي (تناقص کوي)، څه وخت چې $t=90°$ شي، $\csc(t)=1$ کېږي او که د t زاویه له $90°$ څخه تر $180°$ زیاته شي، نو $\sin(t)$ له یوه څخه صفر ته راکمېږي او $\csc(t)$ له (1) څخه $+\infty$ ته زیاتېږي (تزاید کوي). کله چې $t=180°$ شي نو $\sin(t)=0$ او د $\csc(t)$ قیمت غیر معین شي او که t زاویه $180°$ څخه تر $270°$ پورې زیاته شي، $\sin(t)$ له صفر څخه تر (-1) پورې کمېږي او $\csc(t)$ له $-\infty$ څخه تر (-1) پورې زیاتېږي، د $t=270°$ په قیمت $\csc(t)$ له (-1) سره مساوي کېږي.

په همدې ډول کله چې د t زاویه له $270°$ څخه تر $360°$ پورې زیاته شي (تزاید وکړي)، نو $\sin t$ له -1 څخه صفر ته نږدې کېږي او $\csc(t)$ له (-1) څخه تر $-\infty$ پورې کمېږي. په $t=360°$ کې د $\csc(t)$ قیمت غیر معین شي (تعریف شوی نه دی). $t=k\pi$ کې تابع عمودي مجانبونه لري.

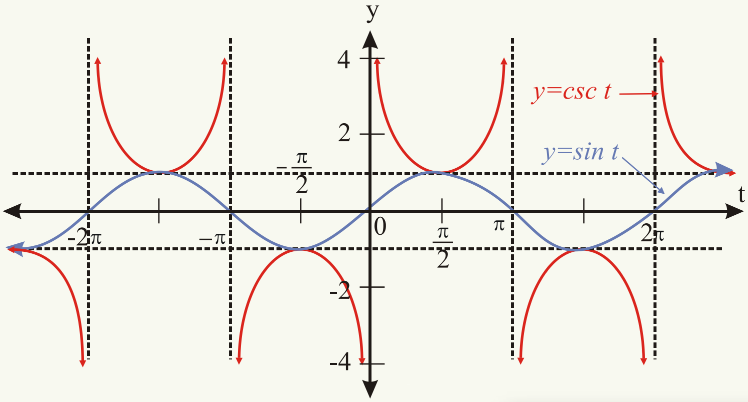
په شکل کې د مثلثاتي دایرې د C په ټکي کې یو مماس رسمو، د $O\overset{\Delta}{C}A$ په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

$$\csc(t)=\csc O\hat{A}C=\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{OA}}{1}=\overline{OA}\qquad (\hat{t}=O\hat{A}C)$$

د $\overline{OA}$ د خط یا $\csc(t)$ تحول په لاندې جدول کې لنډوو:

t	0		$\pi/2$		π			$3\pi/2$		2π
$F(t)=\csc t$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ||	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

لیدل کیږي چې که د t زاویه له صفر څخه تر $360°$ یا (2π) پورې قیمتونه واخلي، نو $\csc(t)\le -1$ او یا $\csc(t)\ge 1$ کیږي، نو لاندې شکل وګورئ.



فعالیت

د $h(t)=-3\csc t$ د تابع ګراف رسم کړئ.

لاندې جدول ته وګورئ:

سمبول	Domain	Range	پریود	طاق یا جفته
$f(t)=\sec t$	ټول حقیقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه	ټول حقیقي عددونه کوچني یامساوي په -1، لوی یا مساوي په (1)	2π	جفته

طاقه	2π	ټول حقيقي عددونه کوچني يامساوي په -1 لوی يا مساوي په 1	ټول حقيقي عددونه پر ته د π له تام مضرب څخه	$f(t)=\csc(t)$
طاقه	π	ټول حقيقي عددونه	ټول حقيقي عددونه پر ته د π له تام مضرب څخه	$f(t)=\cot(t)$

له مثلثاتي تابع ګانو څخه دا نتيجه په لاس راځي چې: د θ يا (t) د زاويې په زياتوالي سره د $\sin\theta$ او $\tan\theta$ مثلثاتي نسبتونه هم زياتيږي، خو د $\cos\theta$ او $\cot\theta$ قيمت کميږي.

پوښتنې

1 – د $f(t)=\cot(t)$ تابع د t په کوم قيمت کې تعريف شوې نه ده او ولې؟

2 – څه وخت چې د θ زاويه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې تحول وکړي، د $\cot\theta$ تحول عبارت دی:

a) $1\to-\infty$ b) $0\to-\infty$ c) دواړه سمې نه دي

3 – که $\hat{t}=\pi$ وی، $\cot(t)$ عبارت دی له:

a) صفر b) -1 c) نه دی تعريف شوی

4 – د $\sec$ او $\csc$ تابع ګانو *Range* عبارت دی له:

a) $\mathbb{R}-\{t\mid -1<t<1\}$ b) ټول حقيقي عددونه c) $\mathbb{R}-\{t\mid -1\le t\le 1\}$

5 – د $f(t)=\csc(t)$ تابع د تعريف ساحه (*Domain*) عبارت ده، له:

a) ټول حقيقي عددونه پر ته د π له تام مضرب څخه

b) ټول حقيقي عددونه پر ته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه

c) ټول حقيقي عددونه پر ته د 2π له تام مضرب څخه d) دري واړه سمې نه دي

6 – د $f(t)=\csc(t)$ تابع د $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې:

a) متزايده ده b) متناقصه ده c) نه متزايده او نه متناقصه ده

د خپرکي لنډيز

• د $\frac{d}{180}=\frac{g}{200}=\frac{R}{\pi}$ د فورمول په مرسته کولای شو، زاویه له یوه واحد څخه بل واحد ته واړوو.

• یو راډیان هغه مرکزي زاویه ده چې د مقابل قوس اوږدالی یې د شعاع له اوږدوالي سره مساوي وي.

• θ د راډیان په حساب مساوي ده په: $\theta=\frac{s}{r}$ چې s د مرکزي زاویې مقابل قوس او r د دایرې شعاع ده.

• که د یوې زاویې رأس د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې او لومړنی ضلع یې د X د محور په مثبت جهت منطبق وي، زاویه په معیاري حالت کې ده.

• که په معیاري حالت کې د دوو یا څو زاویو دویمې ضلعې یو پر بل منطبقې وي، دا زاویې کوټرمینل زاویې نومېږي.

• مثلثاتي دایره هغه دایره ده چې د شعاع اوږدوالی یې د اوږدوالي واحد وي.

$\sin(90-\theta)=\cos\theta$ $\cos(90-\theta)=\sin\theta$ $\tan(90-\theta)=\cot\theta$	$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$	$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\cot(90-\theta)=\tan\theta$ $\sec(90-\theta)=\csc\theta$ $\csc(90-\theta)=\sec\theta$	$\cot(-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(-\theta)=\sec\theta$ $\csc(-\theta)=-\csc\theta$	$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(\pi-\theta)=-\sec\theta$ $\csc(\pi-\theta)=\csc\theta$
$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta$ $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$ $\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$	$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$	$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$ $\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta$ $\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\csc\theta$ $\csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sec\theta$	$\cot(\pi+\theta)=-\cot\theta$ $\sec(\pi+\theta)=-\sec\theta$ $\csc(\pi+\theta)=-\csc\theta$	$\cot(2\pi-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(2\pi-\theta)=\sec\theta$ $\csc(2\pi-\theta)=-\csc\theta$

• د θ او $(\theta + 2k\pi)$ زاويې چې k يو تام عدد دی، کوټرمينل زاويې دي چې ټول مثلثاتي نسبتونه يې سره مساوي دي.

• د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ د توابعو *domain* ټول حقيقي عددونه او *Range* يې $[-1,1]$ دی.

• د $y = \sin\theta$ تابع يوه طاقه تابع ده، ځکه چې $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ دد ې تابع ګراف نظر د وضعيه کمياتو مبدأ ته متناظر دی او د $y = \cos\theta$ تابع جفته تابع ده، ځکه چې $\cos(-\theta) = \cos\theta$ او د cos تابع ګراف نظر y محور ته متناظر دی.

• د $0°$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، π ، $\frac{3\pi}{2}$ او 2π د زاويو دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه تعريف شوې نه دي.

• د sin ، cos ، sec او csc تابع ګانو د تناوب دوره 2π او د tan او cot د تابع ګانو د تناوب دوره(پريود)، π ده.

• د tan تابع هر وخت متزايد او د cot تابع هر وخت متناقصه تابع ده.

• د cos او sec تابع ګانې جفتې او د sin، tan، cot او csc تابع ګانې طاقې دي.

• که د يوې تابع ګراف نظر د y محور ته متناظر وي، دا ډول تابع ګانې جفتې دي يا د هر x لپاره، $x \in domf$ د $f(-x) = f(x)$ رابطه صدق وکړي.

• که د يوې تابع ګراف نظر د وضعيه کمياتو مبدأ ته سره متناظر وه، طاقه تابع ده چې د هر x لپاره، $x \in domf$ د $f(-x) = -f(x)$ رابطه صدق وکړي.

د مثلثاتي توابعو تحول په لنډ ډول په لاندې جدول کې ښودل شوی دی.

θ / تابع	0°	I	$\frac{\pi}{2}$	II	π	III	$\frac{3\pi}{2}$	IV	2π
Sin	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
Cos	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
Tan	0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0
Cot	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$
Sec	1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	1
Csc	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

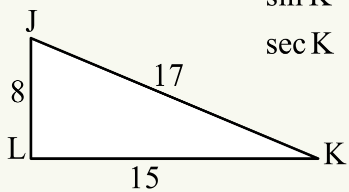
د څپرکي پوښتنې

1 – $42,6033°$ په درجه، دقیقه او ثانیه بدلې کړئ؟

2 – که د یو ساعت د ثانیې د عقربې دوران 3 دقیقې او25 ثانیې وي، د ثانیې عقربې به څو راډیانه مثبته زاویه طی کړې وي؟

3 – د JKL په مثلث کې لاندې قیمتونه پیدا کړئ؟

sin K	sin J	cos J	cos K	tan K	tan J
sec K	sec J	cot J	cot K	csc J	csc K



4 –که د یوې دایرې شعاع 20cm او د مرکزي زاویې مقابل قوس یې $s = 85cm$ وي، مرکزي زاویه څو راډیانه ده؟

5 – د 1 radian او $2\,radian$ مرکزي زاویو د مقابلو قوسو اوږدوالی پیدا کړئ. په دې ډول چې د دایرې قطر 10 cm وي.

6 – د لاندې زاویو دویمې ضلعې (terminal side) چېرې واقع کېږي؟

$\frac{3\pi}{2}$, -7π , $-\frac{11\pi}{2}$, $-500°$, $900°$, $-\pi$

7 – لاندې زاویې چې په راډیان راکړل شوي دي، په درجه یې واړوئ.

$\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{15}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{45}$

8 – په 54 دقیقو کې د یوه ساعت د ثانیې او د ساعت عقربه هره یوه څو راډیانه طی کوي؟

9 – که د یوه ټراکټور د کوچنې ټایر قطر یو متر او د لوی ټایر قطر 120cm وي، څه وخت چې کوچنی ټایر د 70° درجو په اندازه وڅرخېږي لوی ټایر څو راډیانه طی کوي؟

10 – یو څرخ په یو ساعت کې 300ReV دورانونه کوي، دا څرخ په یوه ثانیه کې څو راډیانه ګرځي؟

11 – د یوه مثلث زاویې په ترتیب سره $4x$ درجې، $\frac{70x}{9}$ ګراده او $\frac{\pi x}{20}$ راډیانه دي. هره یوه

زاویه څو درجې ده؟

12- $\hat{A}$، $\hat{B}$، $\hat{C}$ او $\hat{D}$ دیوې څلور ضلعې زاویې دي،که $\hat{A}+\hat{D}=240°$ ، $\hat{C}+\hat{D}=200g$

او $\hat{B}+\hat{D}=\frac{2\pi}{3}^{R}$ وي: د دې څلور ضلعې زاویې د درجې په حساب پیدا کړئ.

13 - دیوه دوران $\frac{1}{12}$ برخه مساوي ده په:

a) $=30^{\circ}$ b) $\frac{\pi}{6}$radian c) $\frac{100}{3}$g d) درې واړه سمې دي

14 - د دوو زاویو مجموعه $17°$ او تفاضل یې 17 گراده دی، دا دواړه زاویې پیدا کړئ.

15 - د درجې په حساب د دوو زاویو مجموعه x او تفاضل یې د گراد په حساب هم x دی، دا دواړه زاویې پیدا کړئ.

16 -لاندې زاویې د درجې په اعشاري شکل ولیکئ.

$47°\ \ 15'\ \ 36''$ $15°\ \ 24'\ \ 45''$

17 - لاندې زاویې په درجه، دقیقه او ثانیې (DMS) واړوئ.

$23.16°$ $4.2075°$

18 - $\sin(-\frac{\pi}{3})$ ، $\tan\frac{3\pi}{4}$ او $\cot\frac{7\pi}{6}$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ

19 - د $[-2\pi, 2\pi]$ په انټروال کې د θ په کوم قیمت، $\sin\theta=1$ دی؟

20 - د $[-2\pi, 2\pi]$ په انټروال کې د $\tan\theta$ تابع، د θ په کومو قیمتونو کې عمودي مجانب لري؟

21 - له (i) څخه تر (iii) پورې کومه یوه اړیکه سمه نه ده؟

(i) $\sin(-x)=-\sin x$ (ii) $\cos(-x)=-\cos x$

(iii) $\tan(-x)=-\tan x$

a) i او ii سمې دي. b) یوازې ii سمه ده.

c) i او iii سمې دي. d) درې واړه سمې دي.

e) هیڅ یو.

22 - $\cos\frac{47\pi}{2}$ ، $\sin(-13\pi)$ او $\tan\frac{8\pi}{3}$ پیدا کړئ؟

23 –داسې زاویه پیدا کړئ چې که دگراد په حساب یې له مقدار ه 23 واحده کم کړو، د زاویې مقدار په درجه لاس ته راشي.

24 - د دریو زاویو مجموعه 240 گراده ده، که لومړنۍ زاویه 40 گراده، دویمه $\frac{3\pi}{4}$ راډیانه وي، دریمه زاویه څو درجې ده؟

25 – د $4185°$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

26 – د $(-3660°)$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

27 – د $y = \cos\theta$ تابع د $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ په انټروال کې:

c) هم متزایده او هم متناقصه ده b) متناقصه ده a) متزایده ده

28 – د $y = \tan\theta$ تابع پریود عبارت دی، له:

a) 2π b) π c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{3\pi}{2}$

29 – د $f(t) = \cos(t)$ تابع:

c) نه جفته او نه طاقه ده b) طاقه ده a) جفته ده

30 – هغه تابع چې گراف یې نظر مبدأ ته متناظر وي.

c) نه جفته او نه طاقه ده b) طاقه ده a) جفته ده

31 – د $y = \cos\theta$ تابع د تناوب دوره عبارت ده، له:

a) π b) $\frac{3\pi}{2}$ c) 2π d) 3π

32 – $\sin 67°$ له $\sin 787°$ سره څه اړیکه لري؟

a) $\sin 787° > \sin 67°$ b) $\sin 787° < \sin 67°$ c) $\sin 67° = \sin 787°$

33 – کومه یوه له لاندې اړیکو څخه سمه ده؟

a) $\sec 135° = -\csc 45°$ b) $\sec 135° = \csc 45°$

d) $\sec 135° = \sec 45°$ c) $\sec 135° = -\sec 45°$

34 - کومه یوه له لاندي اړیکو څخه سمه ده؟

a) $\tan 240° = \tan 60°$ b) $\tan 240° = -\tan 60°$

c) $\tan 240° = \cot 60°$ d) $\tan 240° = -\cot 60°$

35 - $\cot 0° = ?$

a) 1 b) −1 c) 0 d) تعریف شوی نه دی.

36 - $\cos 9\pi = ?$

a) 1 b) −1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

37 - $\sin(-\frac{13\pi}{2}) = ?$

a) 1 b) −1 c) 0 d) دري واړه سم نه دي

38 - د $-2430°$ له زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

39 - $\sin(270° - \theta) = ?$

a) $\sin\theta$ b) $-\sin\theta$ c) $\cos\theta$ d) $-\cos\theta$

40 - $\sin(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

a) 1 b) −1 c) 0 d) تعریف شوی نه دی

41 - $\sec(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

a) 1 b) −1 c) 0 d) تعریف شوی نه دی

42 - $\tan(-15\pi) = ?$

a) 1 b) −1 c) 0 d) تعریف شوی نه دی

43 - $\sec(-1530°) =$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)$ تعریف شوی نه دی

44 - $\cot(-2430°) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)$ تعریف شوی نه دی

45 - $\sin(\frac{235\pi}{2}) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)$ تعریف شوی نه دی

46 - $\cos(\frac{407\pi}{2}) = ?$

a) 1 b) 0 c) -1 d) ∞

47 - $\tan(90+\theta)$ مساوی دی په:

$a)\ \cot\theta$ $b)\ -\cot\theta$ $c)\ -\tan\theta$ $d)\ \tan\theta$

48 - $\tan(270+\theta) = ?$

$a)\ \cot\theta$ $b)\ -\cot\theta$ $c)\ \tan\theta$ $d)\ -\tan\theta$

49 - $\sin(-1980°) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)\ \frac{1}{2}$

50 - $\sin(-\frac{3\pi}{2}) = ?$

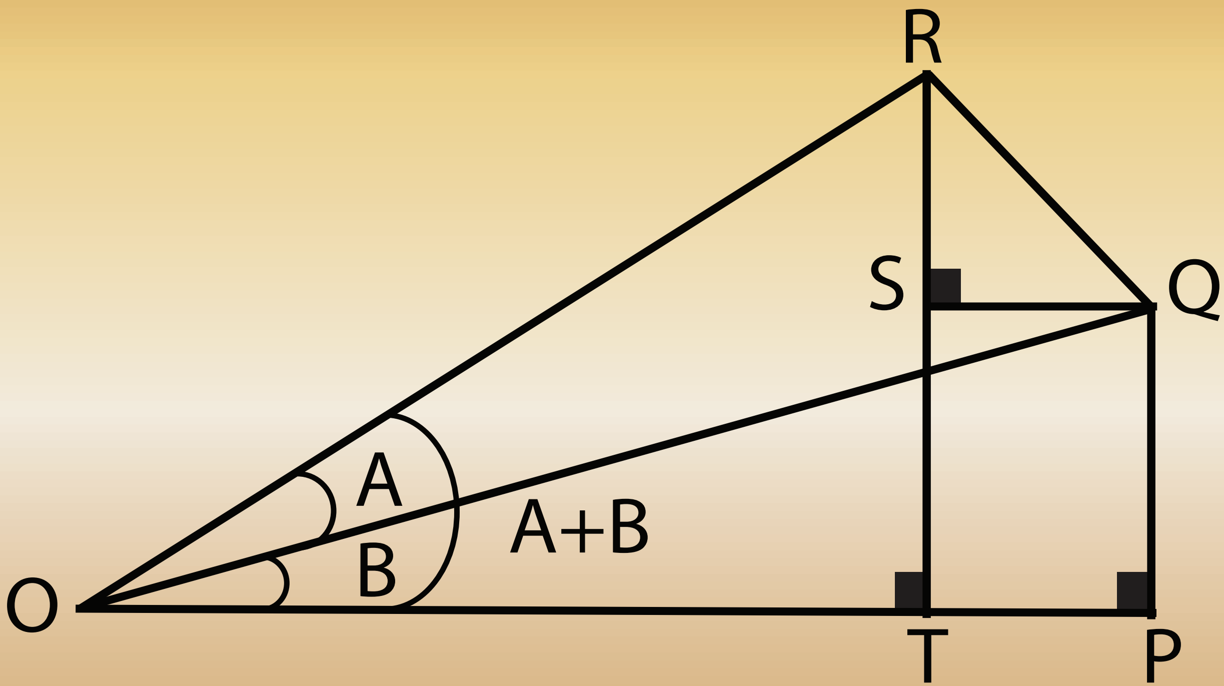
$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)\ \frac{1}{2}$

51 - له لاندې اړیکو څخه کومه یوه یې سمه ده؟

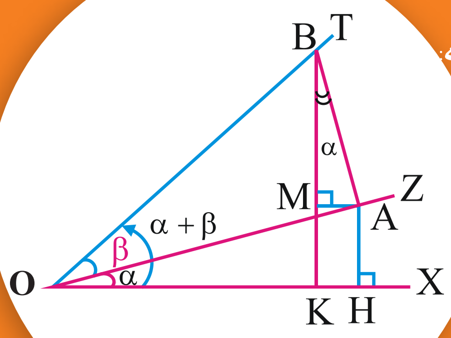
a) $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$ b) $\sin\frac{3\pi}{4} > \sin\frac{\pi}{4}$ c) $\sin\frac{3\pi}{4} < \sin\frac{\pi}{4}$

پنځم څپرکی

د مثلثاتو تطبیقات


R
S
Q
A
B
A+B
O
T
P

د مرکبو زاویو د مثلثاتي نسبتونو قوانین
د جمعي او تفاضل فورمولونه
د دوو زاویو د مجموعې مثلثاتي نسبتونه:



آیا د

$$\text{Sin}(\alpha+\beta) = \text{Sin}\alpha\cos\beta + \text{Cos}\alpha\text{Sin}\beta$$

رابطې سموالی ښودلای شئ؟

1- د $Sin(\alpha+\beta)$ **محاسبه کول**: د $X\hat{O}Z$ زاویه له α او د $Z\hat{O}T$ زاویه له β سره مساوي جلاکوو او داسې یې یو د بل څنګ ته ږدو چې دوه مجاورې زاویې جوړې کړي بیا د OT د قطعه خط پر مخ د OB قطعه خط د واحد په اندازه جلاکوو. د B له ټکي څخه د BA خط پر OZ عمود رسموو، بیا د A له ټکي څخه د AH خط پر OX عمود رسموو، شکل ته په پام سره لرو چې:

$$\text{Sin}\beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AB}}{1} = \overline{AB}$$

$$\text{Cos}\beta = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{1} = \overline{OA}$$

$$\text{Sin}\alpha = \frac{\overline{HA}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{HA}}{\cos\beta} \Rightarrow \overline{HA} = \sin\propto\cos\beta$$

$$\text{Cos}\alpha = \frac{\overline{OH}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OH}}{\cos\beta} \Rightarrow \overline{OH} = \cos\alpha\cos\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{\overline{KB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{KB}}{1} = \overline{KB}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\overline{OK}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OK}}{1} = \overline{OK}$$

د A له ټکي څخه پر KB باندې د AM عمود رسموو چې د KHAM څلور ضلعي مستطيل دی، په نتيجه کې KM=HA او MA=KH دی.

د $M\hat{B}A$ زاويه د α له زاويې سره مساوي ده (ددې دواړو زاويو ضلعې يو پر بل باندې عمود دي). د BMA په قايم الزاويه مثلث کې لرو چې:

$$\cos(M\hat{B}A) = \cos\alpha = \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = \frac{MB}{\sin\beta} \Rightarrow \overline{MB} = \cos\alpha\ \sin\beta$$

$$\sin(M\hat{B}A) = \sin\alpha = \frac{\overline{MA}}{\overline{AB}} = \frac{MA}{\sin\beta} = \frac{KH}{\sin\beta} \Rightarrow \overline{KH} = \sin\alpha\ \sin\beta$$

که د $\overline{KB} = \overline{KM} + \overline{MB}$ په رابطه کې د KM، KB او $\overline{MB}$ پر ځای يې قيمتونه وضع کړو، لرو چې: $(KM = AH = \sin\alpha\cos\beta)$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

2: د $\cos(\alpha+\beta)$ محاسبه کول: په همدې ډول که د $\overline{OK} = \overline{OH} - \overline{KH}$ په رابطه کې د OK، KH او OH پر ځای يې قيمتونه وضع کړو، نو لرو چې:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \ \sin\beta}$$

3: د $\tan(\alpha+\beta)$ محاسبه کول:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta}{\cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta}$$

صورت او مخرج په $\cos\alpha\cos\beta$ وېشو:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

لومړی مثال: $\sin\frac{7\pi}{12}$، $\sin 120°$، $\cos 120°$ او $\tan\frac{5\pi}{12}$ پيدا کړئ.

حل

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 120° = \sin(90°+30°) = \sin 90°\cos 30° + \cos 90°\sin 30°$$

$$\sin 120° = 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+0\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120° = \cos(90°+30°) = \cos 90°\cos 30° - \sin 90°\sin 30°$$

$$= 0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{5\pi}{12} = \tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}$$

$$= \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

د دوو زاويو د تفاضل مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin 120^{\circ} = \sin(180^{\circ}-60^{\circ}) = ?$$

که د جمعې په فورمولونو کې د β پر ځای $-\beta$ وضع کړو، نو لرو چې:

$$\sin[\alpha+(-\beta)] = \sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha(-\sin\beta)$$

پوهېږو چې:

$$\cos(-\beta) = \cos\beta$$

$$\sin(-\beta) = -\sin\beta$$

$$\tan(-\beta) = -\tan\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta-\cos\alpha\ \sin\beta$$

$$\cos[\alpha+(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta$$

$$\tan[(\alpha+(-\beta)]=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(-\beta)}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

فعالیت

په همدې ډول وښیاست چې: $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cdot\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$ دی.

لومړی مثال: $\cos\dfrac{\pi}{12}$ او $\sin 150°$ پیدا کړئ.

حل:

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 150°=\sin(180°-30°)=\sin 180°\cos 30°-\cos 180°\sin 30°$$

$$=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-(-1)\cdot\frac{1}{2}=-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

دویم مثال: د تفاضل د فورمولونو په مرسته ښکاره کړئ چې $\cos(\dfrac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$ دی.

حل:

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta+\sin\frac{\pi}{2}\sin\theta=0\cdot\cos\theta+1\cdot\sin\theta=\sin\theta$$

دریم مثال: وښیاست چې $\cos(270°-\theta)=-\sin\theta$ دی.

حل:

$$\cos(270° - \theta) = \cos 270° \cos\theta + \sin 270° \sin\theta$$
$$\cos(270° - \theta) = 0 \cdot \cos\theta + (-1)\sin\theta = -\sin\theta$$

خلورم مثال: $\tan 120^\circ$ پیدا کړئ:

حل:

$$\tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = \frac{\tan 180^\circ - \tan 60^\circ}{1 + \tan 180^\circ \cdot \tan 60^\circ} = \frac{0 - \sqrt{3}}{1 + 0 \cdot \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{1}$$
$$= -\sqrt{3}$$

فعالیت

وښیاست چې: $\sin 211° \cos 59° + \cos 211° \sin 59° = -1$ او $\cos 211° \cos 149° - \sin 211° \sin 149° = 1$ دی.

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$	$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$	$\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

پوښتني

1- وښياست چې:

$$\tan(45-\theta)=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

2- وښياست چې:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\ \sin\beta$$

3- $\cos 277^\circ\cos 97^\circ+\sin 277^\circ\sin 97^\circ=?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

4- د جمعې د فورمولونو په مرسته $\sin 240^\circ$، $\cos 240^\circ$ او $\tan 240^\circ$ پيدا کړئ.

5- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته وښياست چې:

$\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y]=\cos x\cdot\cos y$ دی.

6- د جمعې د فورمولونو په مرسته د 210° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

7- $\sin 105^\circ$، $\cos 105^\circ$ او $\tan 105^\circ$ پيدا کړئ $(105^\circ=(60^\circ+45^\circ))$

8- که $\sin x=-\frac{3}{4}$ وی او $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ وی، $\cos(\frac{\pi}{4}+x)$ پيدا کړئ.

9- وښياست چې: $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$ دی.

10- $\sin 2^\circ\cos 88^\circ+\cos 2^\circ\sin 88^\circ=?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

د 2α مثلثاتي نسبتونه د α له جنسه:

$$\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}=?$$

$$\cos^2 x-\sin^2 x=?$$

آیا ښودلای شئ چې:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

دی؟

$$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

خرنګه چې $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ دی:

$$\cos 2\alpha=1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

او همدارنګه $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ دی، نو:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=\cos^2\alpha-1+\cos^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

لومړی مثال: که $\sin\theta=\frac{4}{5}$ او د θ دویمه ضلع په دویمه ناحیه (ربع) کې واقع وي، $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پیدا کړئ.

حل: $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$ (د θ دویمه ضلع په دویمه ربع کې ده).

$$\cos\theta=-\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\sqrt{\frac{25-16}{25}}=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2(\frac{4}{5})(-\frac{3}{5}) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (\frac{-3}{5})^2 - (\frac{4}{5})^2 = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{-\frac{24}{25}}{\frac{-7}{25}} = \frac{24}{7}$$

فعالیت

که $\cos\alpha = \frac{4}{5}$، وي او د α دویمه ضلع په لومړی ربع کې پرته وي، $\tan 2\alpha$ پیدا کړئ.

او که $\sin\beta = \frac{12}{13}$ او د β دویمه ضلع په دویمه ربع کې وي $\sin 2\beta$ پیدا کړئ.

دویم مثال: د $60°$ زاویې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه د $120°$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin 120° = 2\sin 60°\cos 60° = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 120° = \cos^2 60° - \sin^2 60° = (\frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \Rightarrow \tan 120° = \frac{2\tan 60°}{1-\tan^2 60°} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3}$$

په همدې ډول:

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\quad,\quad \tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

دريم مثال: که $90°<\theta<180°$ او $\cos\theta=-\frac{3}{4}$ وي، د $\cos 2\theta$ قيمت پيدا کړئ.

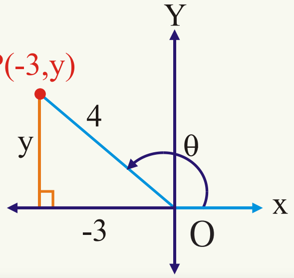
حل:

$$x^2+y^2=r^2$$

$$(-3)^2+y^2=4^2$$

$$y=\pm\sqrt{4^2-(-3)^2}$$

$y=\sqrt{7}$ (ځکه چې د y قيمت په دويمه ربع کې مثبت دی.)



$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=(-\frac{3}{4})^2-(\frac{\sqrt{7}}{4})^2=\frac{1}{8}$$

فعاليت

که $90°<\theta<180°$ او $\cos\theta=-\frac{1}{3}$ وي، د $\sin\frac{\theta}{2}$ قيمت پيدا کړئ.

همدارنګه کولای شو چې د $\sin\theta$، $\cos\theta$ او $\tan\theta$ قيمتونه د $\tan\frac{\theta}{2}$ له جنسه پيدا کړو:

$$\sin\theta=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

پوهيږو چې:

$$\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}=1$$

(صورت او مخرج پر $\cos^2\frac{\theta}{2}$ ويشو:)

$$\sin\theta=\frac{\dfrac{2\sin\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}+\cos^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}}=\frac{\dfrac{2\sin\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}+1}=\frac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{1}=\frac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\sin^2\dfrac{\theta}{2}+\cos^2\dfrac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta=\frac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\sin^2\dfrac{\theta}{2}+\cos^2\dfrac{\theta}{2}}=\frac{\dfrac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}+\dfrac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}}$$

$$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}} \quad , \quad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}}{\dfrac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}}=\frac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$$

همدارنگه کولای شو چې د θ زاويې مثلثاتي نسبتونه د 2θ زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه په لاس راوړو:

$$2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta$$

$$2\cos^2\theta=1+\cos 2\theta$$

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} \quad \text{يا} \quad \cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

په همدې ډول:

$$1-2\sin^2\theta=\cos 2\theta$$
$$-2\sin^2\theta \quad =-1+\cos 2\theta$$
$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$
$$\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \quad \text{یا} \quad \sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

په نتیجه کې:

$$\tan\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}} \quad \text{یا} \quad \tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

لومړی مثال: د 30° زاویې مثلثاتي نسبتونه د 60° له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\sin 30^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos 60^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ=\sqrt{\frac{1+\cos 60^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos 60^\circ}{1+\cos 60^\circ}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

دویم مثال: که $180^\circ<\theta<270^\circ$ او $\sin\theta=-\frac{2}{3}$ وي د $\cos\frac{\theta}{2}$ قیمت پیداکړئ.

حل:

$$x^2+y^2=r^2$$
$$x^2+(-2)^2=3^2 \qquad x=\pm\sqrt{3^2-(-2)^2}=-\sqrt{5}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-\sqrt{5}}{3}$$ (ځکه چې د x قیمت په دویمه ربع کې منفي دی)

خرنگه چې $180° < \theta < 270°$ ده، نو $\frac{180°}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{270°}{2}$ يا $90° < \theta < 135°$ ده په دې معنا چې د $\cos\frac{\theta}{2}$ علامه منفي ده.

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+(\frac{\sqrt{5}}{3})}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{\sqrt{5}}{3})} = -\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{6}}$$

فعاليت

وښياست چې: $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$ او $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ دی.

دريم مثال: **که** $\cos\theta = \frac{4}{5}$ وي او د θ دويمه ضلع په لومړنی ربع کې وي $\sin\frac{\theta}{2}$، $\cos\frac{\theta}{2}$ او $\tan\frac{\theta}{2}$ قيمتونه پيدا کړئ.

حل:

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

خلورم مثال: وښیاست چې $\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}-\frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}=2$ دی.

حل:

$$\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}-\frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin 3\theta\cos\theta-\cos 3\theta\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sin(3\theta-\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2$$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta \quad ، \quad \sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$$

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \qquad \tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \qquad \cos\theta=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

$$\tan\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}$$

پوښتني

1- د 120° زاويې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د 240° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2 - که $\sin\theta=\frac{3}{5}$ وي او د θ دويمه ضلع په لومړنی ربع کې وي، $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پيدا کړئ.

3 - که $\sin\theta=\frac{4}{5}$ وي او د θ دويمه ضلع په دويمه ربع کې وي $\cos\theta/2$ پيدا کړئ.

4 - $\sin\frac{\pi}{12}$ د $\sin\frac{\pi}{6}$ له جنسه پيدا کړئ.

5 - که $\sin\theta=\frac{12}{13}$ وي او د θ دويمه ضلع په دويمه ربع کې وي، $\sin\theta/2$ او $\tan\theta/2$ پيدا کړئ.

6 - د 15° زاويې مثلثاتي نسبتونه د 30° زاويې له جنسه پيدا کړئ.

7 - که $\sin\beta=\frac{12}{13}$ وي او د β دويمه ضلع په دويمه ربع کې وي، د $\sin 2\beta$ قيمت مساوی دی په:

a) $\frac{120}{169}$ b) $-\frac{120}{169}$ c) $=-\frac{169}{120}$ d) درې واړه سم نه دي

8 - $\frac{\cos 3\beta}{\cos\beta}-\frac{\sin 3\beta}{\sin\beta}=?$

a) 2 b) 1 c) -2 d) -1

د 3α زاويي مثلثاتي نسبتونه د α زاويي د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$4\cos^3 45^\circ - 3\cos 45^\circ = ?$$

آيا ښودلای شئ چې دا رابطه

$$\cos 90^\circ = 4\cos^3 30^\circ - 3\cos 30^\circ$$

سمه ده؟

څرنګه چې:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha$$

$$\sin 3\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos\alpha + (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$$

$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \qquad (\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \qquad (\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha)$$

$$= 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$$

$$\boxed{\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}$$

لومړی مثال: $\sin 180^\circ$ د $\sin 60^\circ$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\sin 180^\circ = 3\sin 60^\circ - 4\sin^3 60^\circ = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{12\sqrt{3}}{8}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

څرنګه چې:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha$$

$$= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha$$

$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha$$

$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha) \quad (\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha)$$

$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha$$

$$\boxed{\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}$$

فعالیت

$\cos 270°$ د $\cos 90°$ له جنسه پیدا کړئ.

دویم مثال: $\cos 180°$ د $\cos 60°$ له جنسه پیدا کړئ.

حل:

$$\cos 180° = 4\cos^3 60° - 3\cos 60° = 4(\frac{1}{2})^3 - 3\cdot\frac{1}{2} = 4\cdot\frac{1}{8} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

د $\tan 3\propto$ **پیدا کول:**

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan 3\alpha = \tan(2\alpha+\alpha) = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1-\tan 2\alpha\cdot\tan\alpha} = \frac{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} + \tan\alpha}{1-\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\cdot\tan\alpha}$$

$$= \frac{\frac{2\tan\alpha + \tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{\frac{1-\tan^2\alpha - 2\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}} = \frac{2\tan\alpha + \tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha - 2\tan^2\alpha} = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

دریم مثال: $\tan 135°$ د $\tan 45°$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\tan 135° = \frac{3\tan 45° - \tan^3 45°}{1-3\tan^2 45°} = \frac{3\cdot 1 - 1}{1-3\cdot 1} = \frac{2}{-2} = -1$$

خلورم مثال: وښياست چې $4\sin\theta\sin(60^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta)=\sin 3\theta$

حل:

$$4\sin\theta(\sin 60^\circ\cos\theta-\cos 60^\circ\sin\theta)(\sin 60^\circ\cos\theta+\cos 60^\circ\sin\theta)$$

$$=4\sin\theta(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta)(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta)$$

$$=4\sin\theta(\frac{3}{4}\cos^2\theta-\frac{1}{4}\sin^2\theta)=\sin\theta(3\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$\text{Sin}\,\theta[3(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta]=\sin\theta\cdot 3-3\sin^3\theta-\sin^3\theta$$

$$=3\sin\theta-4\sin^3\theta=\sin 3\theta$$

د $(\alpha+\beta+\square)$ مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin(\alpha+\beta+\square)=\sin[\alpha+(\beta+\square)]=\sin\alpha\cos(\beta+\square)+\cos\alpha\sin(\beta+\square)$$

$$=\sin\alpha(\cos\beta\cos\square-\sin\beta\sin\square)+\cos\alpha(\sin\beta\cos\square+\cos\beta\sin\square)$$

$$=\sin\alpha\cos\beta\cos\square-\sin\alpha\sin\beta\sin\square+\sin\beta\cos\alpha\cos\square+\sin\square\cos\alpha\cos\beta$$

$$\cos[\alpha+(\beta+\square)]=\cos\alpha\cos(\beta+\square)-\sin\alpha\sin(\beta+\square)$$

$$=\cos\alpha(\cos\beta\cos\square-\sin\beta\sin\square)-\sin\alpha(\sin\beta\cos\square+\cos\beta\sin\square)$$

$$=\cos\alpha\cos\beta\cos\square-\cos\alpha\sin\beta\sin\square-\cos\square\sin\alpha\sin\beta-\cos\beta\sin\alpha\sin\square$$

$$\tan(\alpha+\beta+\square)=\tan[\alpha+(\beta+\square)]=\frac{\tan\alpha+\tan(\beta+\square)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(\beta+\square)}$$

$$\tan(\alpha+\beta+\square)=\frac{\tan\alpha+\dfrac{\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\tan\square}}{1-\tan\alpha\dfrac{\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\cdot\tan\square}}$$

$$=\frac{\dfrac{\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta\tan\square+\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\tan\square}}{\dfrac{1-\tan\beta\tan\square-\tan\alpha\tan\beta-\tan\alpha\cdot\tan\square}{1-\tan\beta\cdot\tan\square}}$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\square+\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\square}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta-\tan\beta\tan\square+\tan\alpha\tan\square}$$

پنځم مثال: $\sin 135^\circ$ د $\sin(30^\circ+45^\circ+60^\circ)$ له جنسه په لاس راوړئ.

حـل:

$$\sin 135^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ+60^\circ)=\sin 30^\circ\cos 45^\circ\cos 60^\circ$$
$$-\sin 30^\circ\sin 45^\circ\sin 60^\circ+\sin 45^\circ\cos 30^\circ co60^\circ+\sin 60^\circ\cos 30^\circ\cos 45^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{6}}{8}+\frac{\sqrt{6}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{8}=\frac{4\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پوښتني

1- $\sin 90^\circ$ ، $\cos 90^\circ$ او $\tan 90^\circ$ په ترتیب سره د $\sin 30^\circ$ ، $\cos 30^\circ$ او $\tan 30^\circ$ له جنسه پیدا کړئ.

2- $\cos 135^\circ$ او $\tan 135^\circ$ پیدا کړئ. $135^\circ=(30^\circ+45^\circ+60^\circ)$

3- $8\cos^3\theta-6\cos\theta=?$

a) $\cos 3\theta$ b) $2\cos 3\theta$ c) $-2\cos 3\theta$

4- $\cos(\hat{A}-\hat{B}+\hat{C})$ د $\hat{A}$, $\hat{B}$ او $\hat{C}$ زاویو د مثلثاتي نسبتونو له جنسه پیدا کړئ.

5- وښیاست چې:

$$4\cos x\cos(60^\circ-x)\cos(60^\circ+x)=\cos 3x$$
$$\tan x\tan(60^\circ-x)\tan(60^\circ+x)=\tan 3x$$

د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعي او تفاضـل بدلول د ضرب دحاصل په شکل

$$\sin 30° + \sin 60° = ?$$

$$\tan 45° + \tan 60° = ?$$

آيا د $\sin 30° + \sin 60°$ قيمت پيداکولای شئ؟

څرنگه چې پوهيږو:

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \ldots (I)$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \ldots (II)$$

که $A+B=P$ او $A-B=q$ فرض کړو او (I) او (II) رابطې سره جمع کړو، نولرو چې:

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A \cos B$$

$$\begin{array}{l} A+B=p \\ \underline{A-B=q} \\ 2A=P+q \\ A=\dfrac{P+q}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} A+B=p \\ \underline{_{-}A\mp B=-q} \\ 2B=P-q \\ B=\dfrac{P-q}{2} \end{array}$$

په نتيجه کې لرو چې:

$$\boxed{\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

که له I رابطې څخه II رابطه تفريق کړو، نو لرو چې:

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A \sin B$$

$$\boxed{\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}$$

په همدې ډول:

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B....III$$
$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B....IV$$

که III رابطه د IV سره جمع کړو، لرو چې:

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$$

$$\boxed{\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

که له III رابطې څخه IV رابطه تفریق کړو، نو:

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

فعالیت

د $\sin 60°+\sin 30°$ او $\cos 60°+\cos 30°$ قیمتونه پیدا کړئ.

$$\tan p+\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}+\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q+\cos p\sin q}{\cos p\cos q}=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$$
$$\tan p-\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}-\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q-\cos p\sin q}{\cos p\cos q}=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$$

لومړی مثال(a): وښیاست چې: $\frac{\sin 7\theta+\sin 3\theta}{\cos 7\theta+\cos 3\theta}=\tan 5\theta$

$$\frac{\sin 7\theta+\sin 3\theta}{\cos 7\theta+\cos 3\theta}=\frac{2\sin\frac{7\theta+3\theta}{2}\cos\frac{7\theta-3\theta}{2}}{2\cos\frac{7\theta+3\theta}{2}\cos\frac{7\theta-3\theta}{2}}=\frac{\sin 5\theta\cos 2\theta}{\cos 5\theta\cos 2\theta}=\tan 5\theta$$

b: وښیاست چې $\sin 3x + \sin x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos x$ دی:

حل: $$\sin 3x + \sin x = 2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} = 2\cdot\sin 2x\cdot\cos x$$

فعالیت

وښیاست چې $\cot p + \cot q = \dfrac{\sin(p+q)}{\sin p \sin q}$ او $\cot p - \cot q = \dfrac{\sin(q-p)}{\sin p \sin q}$

دویم مثال: وښیاست چې: $\dfrac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \tan(\beta - \theta)$ او

$$\cos 4\theta - \cos 2\theta = -2\sin 3\theta \sin\theta$$

حل:

$$\frac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \frac{-2\sin\frac{2\theta+2\beta}{2}\sin\frac{2\theta-2\beta}{2}}{2\sin\frac{2\theta+2\beta}{2}\cos\frac{2\theta-2\beta}{2}} = \frac{-2\sin(\theta+\beta)\sin(\theta-\beta)}{2\sin(\theta+\beta)\cos(\theta-\beta)}$$

$$= -\frac{\sin(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\beta)} = -\tan(\theta-\beta) = \tan(\beta-\theta)$$

$$\cos 4\theta - \cos 2\theta = -2\sin\frac{4\theta+2\theta}{2}\sin\frac{4\theta-2\theta}{2} = -2\sin 3\theta\sin\theta$$

د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل بدلول په جمع او یا تفاضل باندې:

خرنگه چې: $A + B = P$ ، $A - B = q$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

یا

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B$$

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

$$\boxed{\sin A\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]}$$

خرنگه چې: $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A\sin B$ دی.

نو: $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

$$\boxed{\cos A\sin B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) - \sin(A-B)]}$$

ځرنګه چې: $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A\cos B$

نو: $2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

$$\boxed{\cos A\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]}$$

ځرنګه چې: $\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2\sin A\sin B$

نو: $-2\sin A\sin B = \cos(A+B) - \cos(A-B)$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin A\sin B &= -\frac{1}{2}[\cos(A+B) - \cos(A-B)\\ &= \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]\end{aligned}}$$

لومړی مثال: وښیاست چې:

$$a: \quad \frac{\sin 8x + \sin 5x + \sin 2x}{\cos 8x + \cos 5x + \cos 2x} = \tan 5x$$

$$b: \quad \cos 75° - \cos 15° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

د a حل:

$$= \frac{2\sin\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2} + \sin 5x}{2\cos\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2} + \cos 5x}$$

$$= \frac{2\sin 5x\cos 3x + \sin 5x}{2\cos 5x\cos 3x + \cos 5x} = \frac{\sin 5x(2\cos 3x + 1)}{\cos 5x(2\cos 3x + 1)} = \tan 5x$$

د b حل:

$$\cos 75° - \cos 15° = -2 \cdot \sin\frac{75° + 15°}{2} \sin\frac{75° - 15°}{2} = -2\sin 45° \sin 30°$$

$$= -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

دویم مثال: د جمعي یا تفاضل شکل ته يې واړوئ.

$$2\cos 95° \sin 13° = \sin(95° + 13°) - \sin(95° - 13°) = \sin 108° - \sin 82°$$

$$\cos 38° \cos 61° = \frac{1}{2}[\cos(38° + 61°) + \cos(38° - 61°)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 99° + \cos(-23°)] = \frac{1}{2}[\cos 99° + \cos 23°]$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{4})\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}[\cos 2x + \cos\frac{\pi}{2}] = \frac{1}{2}\cos 2x$$

دریم مثال:

$$\cos 34° \sin 28° = \frac{1}{2}[\sin(34° + 28°) - \sin(34° - 28°)] = \frac{1}{2}(\sin 62° - \sin 6°)$$

$$2\cos 45° \cos 15° = \cos(45° + 15°) + \cos(45° - 15°) = \cos 60° + \cos 30°$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 10\theta \cos 4\theta = \frac{1}{2}[\sin(10\theta + 4\theta) + \sin(10\theta - 4\theta)] = \frac{1}{2}(\sin 14\theta + \sin 6\theta)$$

څلورم مثال: وښیاست چې: $\frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] = \cos x \cos y$

حل:

$$\frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] = \frac{1}{2}[(\cos x \cos y - \sin x \sin y)$$

$$+ (\cos x \cos y + \sin x \sin y)] = \frac{1}{2}[(\cos x \cos y + \cos x \cos y)]$$

$$= \frac{1}{2}(2\cos x \cos y) = \cos x \cos y$$

پنځم مثال: وښياست چې: $\dfrac{\sin 8\theta\cos\theta-\sin 6\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin 4\theta}=\tan 2\theta$

حل:

$$\frac{\sin 8\theta\cos\theta-\sin 6\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin 4\theta}=\frac{\frac{1}{2}(\sin 9\theta+\sin 7\theta)-\frac{1}{2}(\sin 9\theta+\sin 3\theta)}{\frac{1}{2}(\cos 3\theta+\cos\theta)+\frac{1}{2}(\cos 7\theta-\cos\theta)}$$

$$=\frac{\sin 7\theta-\sin 3\theta}{\cos 3\theta+\cos 7\theta}=\frac{2\cos 5\theta\sin 2\theta}{2\cos 5\theta\cos(-2\theta)}=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\tan 2\theta$$

$$\sin A+\sin B=2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\tan A+\tan B=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}\qquad \tan A-\tan B=\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}$$

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$

$$\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\text{Sin}A\sin B=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-(\cos A-B)]=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B$$

پوښتني

1- وښیاست چې:

$$\frac{\cos 37^\circ + \sin 37^\circ}{\cos 37^\circ - \sin 37^\circ} = \cot 8^\circ$$

2- د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب حاصل د جمعې یا تفاضل شکل ته واړوئ.

$\sin 5x \cos 8x$ $\quad$ $\sin 3\theta \cos 5\theta$ $\quad$ $\cos 30^\circ \cos 60^\circ$

$\sin 32^\circ \cdot \cos 24^\circ$ $\quad$ $\cos 5x \sin 8x$ $\quad$ $\cos 7\theta \sin 5\theta$

$\sin 88^\circ \sin 12^\circ$ $\quad$ $2\sin 60^\circ \cdot \sin 20^\circ$

$2\cos 8\theta \cdot \sin 4\theta$ $\quad$ $2\cos 75\alpha \cdot \sin 25\alpha$ $\quad$ $\sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}$

3- د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د جمعې او تفریق حاصل، ضرب ته واړوئ.

$\cos 56^\circ + \cos 22^\circ$ $\quad$ $\sin 84^\circ - \sin 76^\circ$ $\quad$ $\sin 94^\circ - \sin 86^\circ$

$\cos 86^\circ + \cos 22^\circ$ $\quad$ $\cos 84^\circ - \cos 76^\circ$ $\quad$ $\sin 8\theta + \sin 4\theta$

$\cos 95^\circ - \cos 41^\circ$ $\quad$ $\sin\frac{P+Q}{2} - \sin\frac{P-Q}{2}$ $\quad$ $\sin\frac{5x}{3} - \sin\frac{5x}{6}$

$\cos\frac{3A}{4} + \cos\frac{4A}{3}$ $\quad$ $\cos 84^\circ + \cos 76^\circ$ $\quad$ $\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}$

4- وښیاست چې:

$$\frac{\sin 4A - \sin 2A}{\cos 4A + \cos 2A} = \tan A \quad , \quad \frac{\cos\beta + \cos 9\beta}{\sin\beta + \sin 9\beta} = \cot 5\beta$$

$$\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$$

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$$

5- که $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ وي، (دیو مثلث د داخلي زاویو مجموعه) وښیاست چې:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

6- وښیاست چې:

$$\sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ = 0$$

7-

$$\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ = ?$$

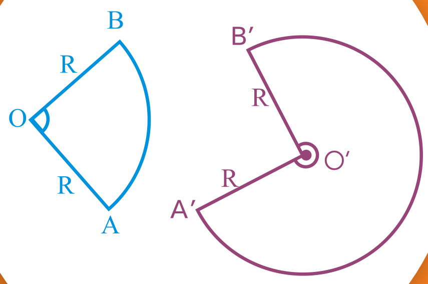
a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

8- د جمعې یا تفاضل د فورمولونو په واسطه وښیاست چې:

$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta$ $\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$

$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta$ $\sin(270^\circ + \theta) = -\cos\theta$

$\cos(270^\circ + \theta) = \sin\theta$ $\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$



د قوس اوږدوالی
(Arc length)

که دیوې دایرې شعاع 5cm وي، د دې دایرې د 45° مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی په څو cm وي؟

که د دووقوسونو شعاع ګانې سره مساوي وي، د دې دوو قوسونو اوږدوالی د راډیان په حساب د قوس له مقدار سره متناسب دی، لکه: څنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{m\overset{\frown}{AB}} = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{m\overset{\frown}{A'B'}}$$

چې $m\ \overset{\frown}{AB}$ او $m\ A'B'$ ددې دواړو قوسونو مقدار د راډیان په حساب دي. که د قوس مقدار دوه چنده شي، د قوس اوږدوالی هم دوه چنده کېږي.

که د یو قوس مقدار θ° او شعاع یې R وي، د θ° د زاویې د مقابل اږدوالی L او د دایرې محیط C وي، نو لرو چې:

$$\frac{L}{\theta^\circ} = \frac{C}{360^\circ}$$

څرنګه چې د دایرې محیط $C = 2\pi R$ دی، نو:

$$\frac{L}{\theta^\circ} = \frac{2\pi R}{360^\circ} \Rightarrow L = \frac{\theta^\circ}{180^\circ}\pi R$$

باید پام مو وي، که د قوس یا θ مقدار د راډیان په حساب وي، نو $L = R\theta$ کېږي.

لومړی مثال: د 45° مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی پیدا کړئ، که د دایرې شعاع 14cm وي.

حل:

$$L=\frac{45^\circ}{180^\circ}\cdot\pi\cdot 14\,cm=\frac{14}{4}\pi\,cm\approx\frac{14}{4}\cdot\frac{22}{7}\,cm=11\,cm$$

دویم مثال: د $\frac{\pi}{4}$ مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی پیدا کړئ، که د دایرې شـعاع 14cm وي.

$$L=R\,\theta$$

$$L=14\,cm\frac{\pi}{4}\approx 14\,cm\cdot\frac{22}{7}\cdot\frac{1}{4}=11\,cm$$

دریـم مثال: که په یوه دایره کې، د 45° مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی $3\pi cm$ وي، د دې دایرې شعاع پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $45^\circ=\frac{\pi}{4}$ radian، نو:

$$L=R\theta$$

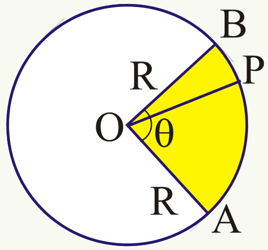
$$R=\frac{L}{\theta}=\frac{3\pi cm}{\frac{\pi}{4}}=3\pi\cdot\frac{4}{\pi}=12cm$$

د یـوې دایرې قطاع(Sector of a circle): د یوې دایرې د $\overset{\frown}{AB}$ قوس چې د دایرې مرکز O او شعاع یې R ده، په پام کې نیسو، د $\overline{OP}$ د ټولو خطونو مجموعې ته چې P د $\overset{\frown}{AB}$ د قوس یوه نقطه ده، قطاع ویل کېږي.

که د $\overset{\frown}{AB}$ قوس اندازه θ راډیان وي، θ ته د قطاع زاویه وایي.

یا قطاع په دې ډول هم تعریفولای شو:

د یوې دایرې د سطحې هغه برخه چې د دایرې د دوو شعاع ګانو تر منځ واقع وي، قطاع بلل کېږي.



د قطاع د مساحت پیدا کول: که د دایرې شعاع R وي، د دې دایرې د θ راډیان د قطاع مساحت مساوي دی په: $S=\frac{1}{2}R^2\theta$ چې S د قطاع مساحت او R د دایرې شعاع ده، ځکه چې:

$$\begin{matrix} 2\pi^R & \square R^2 \\ \theta^R & S \end{matrix}\Bigg\} \Rightarrow S=\frac{\pi R^2\cdot\theta}{2\pi}=\frac{1}{2}R^2\theta$$

او یاکه د θ زاویه د درجې په حساب وي.

$$\begin{matrix} 360^\circ & \pi R^2 \\ \theta^\circ & S \end{matrix}\Bigg\} \Rightarrow S=\pi R^2\frac{\theta}{360^\circ}$$

لومړی مثال: که د یوې دایرې شعاع 10cm وي، د دایرې د هغه قطاع مساحت پیدا کړئ چې د قطاع زاویه یې $\theta=90^\circ$ وي.

حل: څرنګه چې Radian $90^\circ=\frac{\pi}{2}$ دی:

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta$$

$$S=\frac{1}{2}(10cm)^2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\cdot100cm^2\cdot\frac{\pi}{2}=25\pi cm^2$$

دویم مثال: که د یوې دایرې شعاع 10cm وي، د دایرې د هغه قطاع مساحت پیدا کړئ چې د قطاع زاویه یې $\theta=72^\circ$ وي.

حل:

$$72^\circ=72\cdot\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{2\pi}{5}\ \text{Radian}$$

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta=\frac{1}{2}\cdot100cm^2\cdot\frac{2\pi}{5}=20\pi\, cm^2$$

دریم مثال: که د دایرې شعاع 6cm او د دې دایرې د یوې قطاع مساحت $15\pi cm^2$ وي. د قطاع د قوس اوږداولی پیدا کړئ.

حل:

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta \quad \text{یا} \quad 15\pi cm^2=\frac{1}{2}(6cm)^2\theta$$

$$15\pi cm^2 = 18\theta$$

$$\theta = \frac{15\pi}{18} = \frac{5\pi}{6} \text{ Radian}$$

طول قوس $L = R\theta = 6cm\frac{5\pi}{6} = 5\pi cm = 5\cdot 3{,}14cm \approx 15{,}7cm$

** څلورم مثال**: یوه دایره چې $7cm$ شعاع لري، ددې دایرې محیط، مساحت او د $60°$ مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی یې پیدا کړئ او هم ددې دایرې د قطاع مساحت پیدا کړئ چې $\theta = 60°$ وي.

حل: څرنگه چې $60° = \frac{\pi}{3}$ Radian دی، نو:

$$C = 2\pi R \approx 2\cdot\frac{22}{7}\cdot 7\,cm = 44\,cm \;,\; A = \pi R^2 \approx \frac{22}{7}\cdot 49\,cm^2 = 154\,cm^2$$

$$L = R\theta = 7\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}cm \qquad , \quad A = \frac{1}{2}R^2\theta = \frac{1}{2}\cdot 49\,cm^2\cdot\frac{\pi}{3} \approx 25.6\,cm^2$$

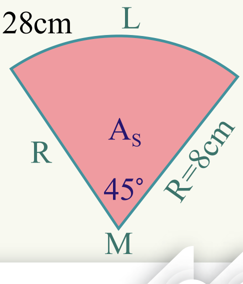
پنځم مثال: که د یوې دایرې شعاع $8cm$ او د قطاع زاویه یې $45°$ وي، د قطاع مساحت، د قطاع د مقابل قوس اوږدوالی او ددې قطاع محیط پیدا کړئ.

حل:

د قطاع مساحت $A_s = \pi R^2\frac{\theta}{360°} = (8cm)^2(3{,}14)\cdot\frac{45°}{360°} \approx 25{,}12cm$

د قطاع مقابل قوس $L = 2\pi R\frac{\theta}{360°} = 2\cdot 8cm\cdot 3.14\cdot\frac{45°}{360°} \approx 6.28cm$

د قطاع محیط $= 2\pi R\frac{\theta}{360°} + 2R = 6.28cm + 2\cdot 8cm \approx 22.28cm$



فعالیت

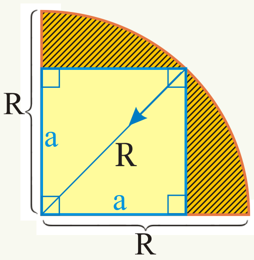
که د دایرې شعاع $10cm$ وي، د هغه قطاعگانو مساحت پیدا کړئ چې د قوس اندازه یې $180°$، $216°$ او $324°$ وي.

شپږم مثال: د لاندې شکل په شان په $90°$ قطاع کې د R په شعاع مربع محاط شوې ده، د خط شوې برخې مساحت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دایرې شعاع R ده،د دایرې په څلورمه برخه کې د مربع قطر $d = R = a\sqrt{2}$

دی، که a د مربع ضلع وي، نو د مربع یوه ضلع $a = \frac{R}{\sqrt{2}}$ او د مربع مساحت $S = \frac{R^2}{2}$

دی، څرنګه چې د دایرې د څلورمې برخې مساحت $\frac{1}{4}\pi R^2$ دی.



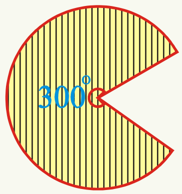
نود خط شوی برخې مساحت مساوي دی په: $\frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 = \frac{R^2}{4}(\pi - 2)$

اووم مثال: په شکل کې د دایرې قطاع چې شعاع یې $1cm$ او مرکزي زاویه یې $300°$ ده. د دې شکل محیط څو سانتي متره کېږي؟

$360° \qquad 2\pi R$

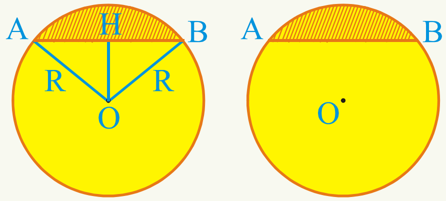
$300° \qquad x \qquad x = \frac{300° \cdot 2\pi R}{360°} = \frac{5\pi R}{3}cm$

د دې شکل محیط $= (\frac{5}{3}\pi R + 2)cm$



د دایرې قطعه (Segment of a circle): د دایرې د سطحې یوې برخې ته چې د قوس او مقابل وتر تر منځ واقع وي، قطعه وايي.

د دایرې قطعه د قطعې د قوس په حساب ښودل کېږي. د مثال په ډول که د $\overset{\frown}{AB}$ قوس $\frac{\pi}{6}$ رادیان وي، قطعې ته هم $\frac{\pi}{6}$



راډیان وایي.

د قطعې مساحت: د θ راډیان د قطعې مساحت چې ددایرې شعاع R وي، مساوي دی، په:

$$S=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$$

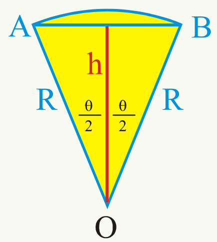
ځکه که د AB قوس θ راډیان وي او د O نقطه د A او B له نقطو سره ونښلوو، نو لرو چې:

د AOB د مثلث مساحت - د AOB د قطاع مساحت = د قطعې مساحت

$S_{\overset{\Delta}{AOB}}$ د مثلث مساحت $-$ S_{OAB} د قطاع مساحت $S=$ د قطعې مساحت

په لاندې شکل کې لیدل کېږي چې د $A\overset{\Delta}{O}B$ مثلث متساوي الساقین دی، نو په دې اساس:

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{h}{R}$$



ارتفاع $h=R\cos\frac{\theta}{2}$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\frac{AB}{2}}{R}$$

د مثلث قاعده: $AB=2R\sin\frac{\theta}{2}$

$$A\overset{\Delta}{O}B \text{ د مثلث مساحت } = \frac{\text{قاعده . ارتفاع}}{2}=\frac{h\cdot AB}{2}$$

څرنګه چې $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ دی.

په نتیجه کې: $\text{مثلث مساحت}=\frac{R\cos\frac{\theta}{2}\cdot 2R\sin\frac{\theta}{2}}{2}=\frac{R^2\sin\theta}{2}=\frac{1}{2}R^2\sin\theta$

څرنګه چې $\frac{R^2\sin\theta}{2}=S_{OAB}$ د مثلث مساحت او د قطاع مساحت $A_s=\frac{1}{2}R^2\theta$ دی.

نو:

$$\text{د قطعې مساحت } S=\frac{1}{2}R^2\theta-\frac{1}{2}R^2\sin\theta=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$$

لومړی مثال: د پورته شکل په شان که د یوې دایرې شعاع $R=6.8cm$ وي او د دې دایرې د یوې قطاع زاویه $\theta=71°$ وي، د قطاع مساحت، د ABO د مثلث مساحت او د دې دایرې د

قطعي مساحت پيدا کړئ.

حل:

$R = 6,8cm$

$\theta = 71°$

د قطاع مساحت $A = \pi R^2 \frac{\theta}{360°} = (6.8cm)^2 \cdot 3.14 \frac{71°}{360°} \approx 28.64cm^2$

د مثلث ارتفاع $h = R\cos\frac{\theta}{2} = 6.8cm \cdot \cos\frac{71°}{2} \approx 5.54cm$

$\cos 35°30' = 0.8141$

د مثلث قاعده $b = 2 \cdot R\sin\frac{\theta}{2} = 2 \cdot 6.8cm \cdot \sin\frac{71°}{2} \approx 7.9cm$

$\sin 35°30' = 0.5807$

د مثلث مساحت $A = \frac{1}{2}R^2 \sin\theta = \frac{1}{2}(6.8cm)^2 \cdot \sin 71° \approx 21.96cm^2$

$\sin 71° = 0.9455$

د مثلث مساحت - د قطاع مساحت = د قطعي مساحت

د قطعي مساحت $= 28,64cm^2 - 21,96cm^2 = 6,68cm^2$

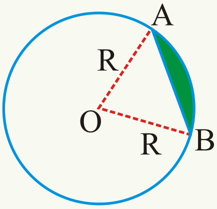
دويم مثال: د هغه قطعي مساحت پيدا کړئ چې شعاع يې R او قوس يې $\overset{\frown}{AB}$ وي، که:

$\overset{\frown}{AB} = 60°\ ,\ R = 12cm$ وي.

حل: څرنګه چې $60° = \frac{\pi^R}{3}$ دی، نو:

$S = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta) = \frac{1}{2}(12cm)^2(\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \cdot 144cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})$

$= 72cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 24\pi\, cm^2 - 36\sqrt{3}\, cm^2 = (24\pi - 36\sqrt{3})cm^2$

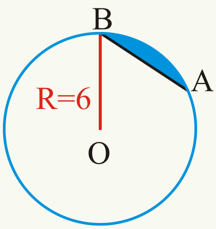


فعالیت

د هغې دایرې د قطعې مساحت پیدا کړئ چې شعاع یې 6cm او $\overset{\frown}{AB}=120^\circ$ قوس وي.

دریم مثال: د هغه قطعې مساحت پیدا کړئ چې د 6cm وتر په واسطه جلا شوی وي او د دایرې شعاع هم 6cm وي.

حل: څرنګه چې د قطعې قوس $\frac{\pi}{3}$ راډیانه دی:



$$S=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)=\frac{1}{2}(6cm)^2(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2})$$
$$=18cm^2(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2})=(6\pi-9\sqrt{3})cm^2$$
$$\approx 6(3.14)cm^2-9(1.73)cm^2=3.27cm^2$$

پوښتنې

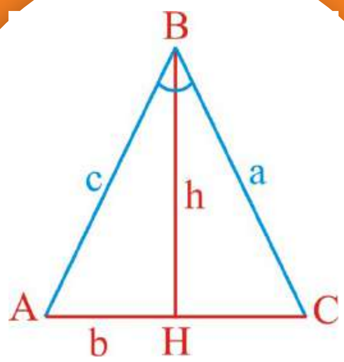
1- د هغې قطاع مساحت پیدا کړئ چې د $\frac{\pi}{6}$ راډیان مرکزي زاویې په مقابل کې واقع وي، که د دایرې شعاع 20cm وي.

2- د هغې قطاع اړونده مرکزي زاویه پیدا کړئ چې مساحت یې $55.5cm^2$ او د دایرې شعاع 12cm وي.

3- که د یوې دایرې شعاع 10m وي، د هغو قوسونو اوږدوالی پیدا کړئ چې د 3,8 راډیان او 27 راډیانه مرکزي زاویو په مقابل کې واقع وي.

د مثلث د مساحت پیدا کول د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو تر منځ د زاویې له څنګه:

که په یوه مثلث کې د دوو ضلعو اوږدوالی 4cm او 8cm وي او ددې ضلعو تر منځ زاویه 30° وي آیا ددې مثلث مساحت پیدا کولای شئ؟



د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث په پام کې نیسو او د B له راس څخه د $\overline{BH}$ ارتفاع د $\overline{AC}$ پر ضلع باندې رسموو:

څرنګه چې $\sin A = \frac{BH}{c} = \frac{h}{c}$ دی، په نتیجه کې $h = c\sin A$ کېږي له هندسې څخه پوهېږو

چې د یوه مثلث مساحت($S = \frac{\text{ارتفاع . قاعده}}{2}$) دی.

$$S_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} b c \sin A \qquad (h = c\sin A)$$

فعالیت

د پورتني مثلث د A او C له رأسونو څخه ارتفاع ګانې رسم کړئ او وښیاست چې:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} ab\sin C$ او $S_{ABC} = \frac{1}{2} ac\sin B$ دی.

لومړی مثال: د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د دوو ضلعو اوږدوالی یې $a = 3,5\text{cm}$ او $c = 6\text{cm}$ او د دواړو ضلعو ترمنځ زاویه یې $B = 47,5°$ وي.

حل:

$$A = \frac{1}{2} ac \sin B$$

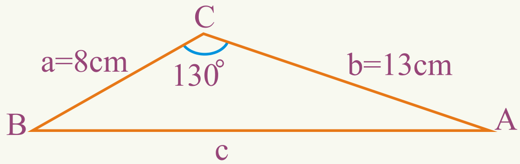
$$\sin 47.5^\circ = 0.73727733$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3{,}5cm \cdot 6cm \cdot \sin 47{,}5^\circ \approx 7{,}74cm^2$$

دویم مثال: د لاندې شکل د مثلث مساحت پیداکړئ.

حل:

$$A = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2}(8)(13) \sin 130^\circ \approx 39.83\, cm^2$$

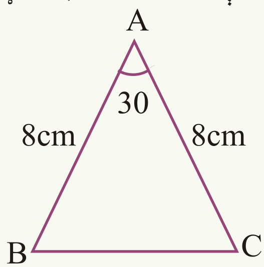


$(\sin 130^\circ = 0.7660)$

دریم مثال: د $\overset{\Delta}{ABC}$ په متساوي الساقین مثلث کې $\overline{AB} = \overline{AC} = 8cm$ او $A = 30^\circ$ ده، ددې مثلث مساحت پیداکړئ.

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 30^\circ$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 16\, cm^2$$



د مثلث د مساحت پیدا کول د دریو ضلعو له جنسه (د هیرون فورمول)

ددې کار لپاره د یوې زاویې د نیمایي sin، د مثلث د ضلعو د اوږدوالي له جنسه په لاس راوړو:

د ABC په هر مثلث کې لاندې اړیکې صدق کوي.

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}, \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

چې a,b,c د مثلث ضلعې او p د مثلث د محیط نیمایي ده $(p = \frac{a+b+c}{2})$ په تیرو لوستو کې مولوستل چې:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \;\square\; \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos B}{2}} \;\square\; \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos C}{2}}$$

په هر مثلث کې $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ چې دا رابطه د $\cos ine$ د قضيې په نوم يادېږي، دلته د دې رابطې له ثبوت څخه صرف نظر کوو او په خپل وخت کې به وروسته ثبوت شي، د $\cos A$ پر ځای يې قيمت وضع کوو.

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}$$

خرنگه چې: $a+b+c=2p$ دی.

$$a-b+c=a+b+c-2b=2p-2b=2(p-b)$$
$$a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c)$$

د $(a-b+c)$ او $(a+b-c)$ قيمتونه وضع کوو، نو لرو چې:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2(p-b)2(p-c)}{4bc}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

فعاليت

په همدې ډول وښياست چې:

$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$, $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$ وي.

په همدې ډول کولای شو چې د مثلث د ضلعو له جنسه د يوې زاويې نيمايي $\cos ine$ په لاس راوړو:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \;\square\; \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \;\square\; \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

ثبوت: خرنگه چې $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ دی.

د $\cos A$ قیمت وضع کوو:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{1+\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$$

$$b+c+a-2a=2p-2a$$

$$b+c-a=2p-2a=2(p-a)$$

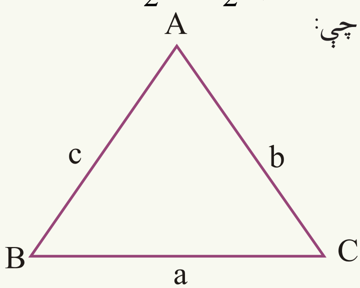
په نتیجه کې لرو چې:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

فعالیت

خرنگه چې $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$ دی، وښیاست چې: $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

پوهیږو چې $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ دی که د $\sin\frac{A}{2}$ او $\cos\frac{A}{2}$ قیمتونه وضع کړو لرو چې:



$$\sin A=2\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\sin A=2\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(bc)^2}}$$

$$\sin A=\frac{2}{bc}\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

خرنگه چې د $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$ مثلث مساحت دی.

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A$$

د $\sin A$ قیمت وضع کوو:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

د پورتنیو مساواتو له پرتله کولو څخه لرو چې:

$$\sin A=\frac{2}{bc}\cdot S=\frac{2S}{bc} \quad \square \quad \sin B=\frac{2S}{ac} \quad \square \quad \sin C=\frac{2S}{ab}$$

دریم مثال: د هغه مثلث مســاحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې په لاندې ډول راکړل شوي وي.

$a=5cm \qquad b=4cm \qquad c=3cm$

حل:

$$P=\frac{a+b+c}{2}=\frac{5cm+4cm+3cm}{2}=6cm$$
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)}$$
$$=\sqrt{6\cdot1\cdot2\cdot3}=\sqrt{36}=6\,cm^2$$

فعالیت

د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې: $b=5cm$, $c=6cm$ او $a=4cm$ وي.

څلـورم مثال: که د یوه مثلـث ضلعې $a=18cm$، $b=24cm$ او $c=30cm$ وي. د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل

$$P=\frac{a+b+c}{2}=\frac{18+24+30}{2}=36cm$$
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$=\sqrt{36(36-18)(36-24)(36-30)}=\sqrt{36\cdot18\cdot12\cdot6}=216\ cm^2$$

پنځم مثال: د هغه مثلث مساحت پیداکړئ چې د ضلعو اوږدوالی يې $a = 29{,}7\text{ft}$، $b = 42{,}3\text{ft}$ او $c = 38{,}4\text{ft}$ وی.

حل:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{29.7+42.3+38.4}{2} = 55{,}2\text{ft}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{55.2(55.2-29.7)(55.2-42.3)(55.2-38.4)}$$

$$= \sqrt{55.2(25.5)(12.9)(16.8)} = 552\text{ft}^2$$

د يو مثلث د محيطي دايرې د شعاع پيدا کول:

محيطي دايره هغه دايره ده چې مثلث د دايرې په داخل کې واقع وي او دايره د مثلث په درې واړو راسونو باندې مماس وي، او د محيطي دايرې مرکز د مثلث د درې واړو عمودي ناصفونو د تقاطع نقطه ده.

د شکل په شان د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث د ضلعو اوږدوالی د a، b او c څخه عبارت دی چې د O ټکی چې د دايرې مرکز دی د مثلث د ضلعو د درې واړو عمودي ناصفونو (Bisector Perpendicular) د تقاطع ټکی هم دی.

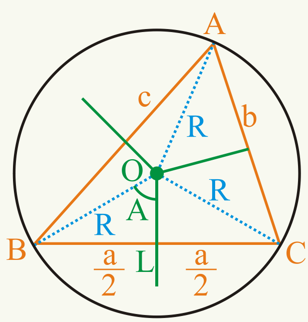
څرنګه چې د BOC مثلث متساوي الساقين دی، نو ارتفاع د $B\hat{O}C$ زاويه او د مثلث قاعده نيمايي کوي . په نتيجه کې: $\hat{A} = B\hat{O}L = L\hat{O}C$

$$\sin\hat{A} = \sin B\hat{O}L = \sin L\hat{O}C$$

څکه چې مرکزي زاويه د محيطي زاويې دوه برابره ده چې د عين قوس په مقابل کې واقع وي.

$$\sin\hat{A} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$$

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{a}{2\cdot\frac{2s}{bc}} = \frac{abc}{4s} \qquad \left(\sin A = \frac{2S}{bc}\right)$$



او د $R = \dfrac{a}{2\sin A}$ څخه لرو چې:

$$a = R\cdot 2\sin A$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

په همدې ډول

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \quad \text{یا} \quad R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}$$

لومړی مثال: د ABC مثلث د محیطي دایرې شعاع پیداکړئ چې ضلعې یې $a=11cm$ ، $b=12cm$ او $c=13cm$ وي.

حل:

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{11\cdot 12\cdot 13}{4\sqrt{18\cdot 7\cdot 6\cdot 5}}=6{,}98cm \qquad , \qquad p=\frac{11+12+13}{2}=18cm$$

فعالیت

د هغه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $18cm$ ، $24cm$ او $30cm$ وي.

دویم مثال: د هغه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a=3cm$ ، $b=5cm$ او $c=6cm$ وي.

حل:

$$R=\frac{abc}{4\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{3\cdot 5\cdot 6}{4\cdot\sqrt{7\cdot 4\cdot 2\cdot 1}}=\frac{90}{4\cdot\sqrt{56}}=\frac{45}{2\cdot\sqrt{56}}\approx 3cm$$

د یو مثلث د محاطي دایرې د شعاع پیدا کول:

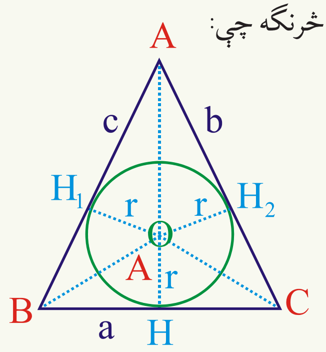
د مثلث محاطي دایره هغه دایره ده چې دایره د مثلث په دننه کې واقع وي او دایره د مثلث په دننه کې د مثلث د درې واړه ضلعو سره مماس وي، د محاطي دایرې مرکزد مثلث د درې واړو ناصف الزاویو د تقاطع ټکی (O) دی.

د $\overset{\Delta}{OAB}$ + د $\overset{\Delta}{OCA}$ + د $\overset{\Delta}{OBC}$ مثلثونو مساحت = د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث له مساحت سره

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}r\cdot 2p$$

$$S=r\cdot p \quad \Rightarrow r=\frac{s}{p}$$

خرنگه چې:



$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$

دریم مثال: د هغه مثلث د محاطي دایرې شعاع او د محاطي دایرې مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې 7cm ، 8cm او 9cm وي.

حل

$$p=\frac{7+8+9}{2}=12cm$$

$$S=\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}=26.83cm^2$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{26.83cm^2}{12cm}=2.23cm$$

د محاطي دایرې مساحت مساوي دی، په: $=\pi r^2=\frac{22}{7}\cdot(2.23cm)^2\approx 15.6cm^2$

خلورم مثال: د یو قایم الزاویه مثلث دوه قایمې ضلعې په ترتیب سره 3cm او 4cm دي، د محیطي او محاطي دایرو شاع ګانې یې پیدا کړئ.

حل:

$$(\overline{AC})^2=(\overline{AB})^2+(\overline{BC})^2$$

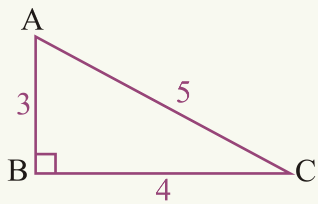
$$AC=\sqrt{9+16}=5$$

$$p=\frac{3+4+5}{2}=6cm$$

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{3\cdot4\cdot5}{4\cdot\sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}}=\frac{60}{4\cdot\sqrt{6\cdot3\cdot2\cdot1}}=\frac{60}{4\cdot6}=\frac{60}{24}$$

$$=\frac{5}{2}cm=2,5cm$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{6}{6}=1cm$$



پنځم مثال: د MTN په قایم الزاویه مثلث کې چې که قایمې ضلعې یې m او n راکړ شـوې وي، د دې مثلث مساحت او د محیطي دایرې شعاع یې پیدا کړئ.

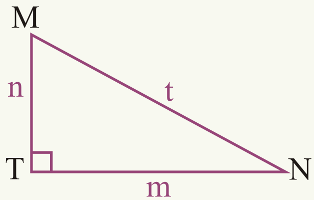
حل:

$$(\overline{MN})^2 = m^2 + n^2$$

$$t = MN = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$S = \frac{n \cdot m}{2} \;,\; R = \frac{m \cdot n \cdot t}{4S} = \frac{m \cdot n \cdot \sqrt{m^2 + n^2}}{4\frac{n\,m}{2}} = \frac{m\,n\sqrt{m^2 + n^2}}{2mn}$$

محیطي دایرې شعاع $R = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{2}$



فعالیت

د هغه مثلث د محاطي دایرې شعاع پیدا کړئ، که چېرې د ضلعو اوږدوالی یې 34cm ، 35cm او 36cm وي.

د متساوي الاضلاع مثلث ارتفاع، مساحت او د محیطي او محاطي دایرو د شعاع ګانو پیدا کول:

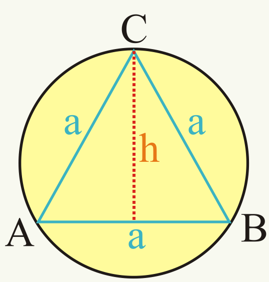
$$\sin A = \sin 60° = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

د فیثاغورث د قضیې په اساس لرو چې:

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$



$$S = \frac{h \cdot a}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$ د ABC مثلث مساحت

$$R = \frac{abc}{4s} = \frac{a^3}{4 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3}} = \frac{a^3}{a^2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$$

$$r = \frac{s}{p} = \frac{\frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}}{\frac{3a}{2}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{3a} = \frac{a}{6}\sqrt{3}$$

شپږم مثال: د يو متساوي الاضلاع مثلث محيط 18cm دی. د دې مثلث مساحت، ارتفاع او د محيطي او محاطي دايرو شعاع ګاني پيدا کړئ.

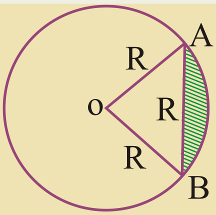
حل: د دې مثلث يوه ضلع (a) مساوي ده، په:

$$a = \frac{1}{3} \cdot 18cm = 6cm$$

$$S = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{(6cm)^2}{4}\sqrt{3} = 15{,}6cm^2 \qquad h = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{6cm}{2}\sqrt{3} = 5{,}2cm$$

$$R = \frac{a}{3}\sqrt{3} = \frac{6cm}{3}\sqrt{3} = 3{,}5cm \qquad r = \frac{a}{6}\sqrt{3} = \frac{6cm}{6}\sqrt{3} \approx 1{,}7cm$$

پوښتني



1- د شکل مطابق د OAB مثلث متساوي الاضلاع دی چې هره ضلع يې R ده. د O په مرکز دايره رسم شوې ده چې د A او B له ټکو څخه تيرېږي. د AB په وتر سره د قطعې مساحت مساوي دی په:

a) $(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4})R^2$ b) $(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{5})R^2$ c) $(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2})R^2$

d) $(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{2}}{2})R^2$ e) $(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4})R^2$

2- که د یو متساوی الساقین مثلث د هر ساق اوږدوالی 6cm او د ساقو تر منځ زاویه یې 30° وي د مثلث مساحت پیدا کړئ.

3- که د یوه مثلث د دوو ضلعو اوږدوالی $5\sqrt{2}$cm او 6cm وي، او دواړو ضلعو تر منځ زاویه یې 45° وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

4- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتیب سره 3cm ، 4cm او 5cm وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

5- د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a = 7$cm ، $b = 9$cm او $c = 12$cm وي.

6- د هغه قایم الزاویه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ، که قایمې ضلعې یې 12cm او 5cm وي.

7- که د ABC ، د متساوي الساقین مثلث قاعده $a = 8$cm او د دې مثلث محاطي شعاع $r = 3$cm وي. د محیطي دایرې شعاع اوږدالی یې پیدا کړئ.

8- که د یوه قایم الزاویه مثلث مساحت 84cm^2 وي او د یوې ارتفاع اوږدوالی یې 3,36cm وي، د دې مثلث د محیطي شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

- د جمعي او تفاضل فورمولونه:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \text{او} \quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad \text{او} \quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} \qquad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

- د 2α د زاويې مثلثاتي نسبتونه د α د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

- د يوې زاويې مثلثاتي نسبتونه، د زاويې د دوه چند مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \;،\; \cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} \;،\; \tan\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$$

- د يوې زاويې د نيمايي مثلثاتي نسبتونه د زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \;,\; \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \;,\; \tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

- د يوې زاويې د درې چنده مثلثاتي نسبتونه د هغې زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha \quad , \quad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

- د درېو زاويو د مجموعې $(\alpha+\beta+\theta)$ مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin(\alpha+\beta+\theta)=\sin\alpha\cos\beta\cos\theta+\sin\beta\cos\alpha\cos\theta+\sin\theta\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\theta$$

$$\cos(\alpha+\beta+\theta)=\cos\alpha\cos\beta\cos\theta-\cos\alpha\sin\beta\sin\theta-\cos\beta\sin\alpha\sin\theta-\cos\theta\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta+\theta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\theta-\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\theta-\tan\alpha\tan\theta}$$

د ضرب فورمولونه (هغه فورمولونه چې د دوو زاويو د مجموعې يا تفاضل مثلثاتي نسبتونه په ضرب بدلوي).

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

- هغه فورمولونه چې د دوه زاويو د مثلثاتي نسبتونو ضرب د جمعې او يا د تفاضل په شکل بدلوي:

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$

$$\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\sin A\sin B=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)]=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$

- د R په شعاع د دايرې د مرکزي زاويې (θ°) د مقابل قوس اوږدوالى مساوي دى په:

$$L=\pi R\frac{\theta^\circ}{180^\circ}$$

- د R په شعاع د دايرې مرکزي زاويې θ راډيان د مقابل قوس اوږدوالى مساوي دى په:

$$L=R\theta$$

- د دايرې د سطحې هغه برخه چې د دوو شعاعو تر منځ واقع وي، قطاع بلل کيږي:
- د قطاع مساحت د ($A_{sector}=\frac{1}{2}R^2\theta$) د فورمول په مرسته لاسته راځي:

• د دايرې د سطحې هغه برخه چې د قوس او د مقابل وتر تر منځ واقع وي، قطعه بلل کېږي:

• د قطعې مساحت د $A_{Segment} = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta)$ د فورمول په مرسته پيدا کېږي:

• د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو تر منځ زاويې له جنسه د مثلث مساحت مساوي دی په:

$$S = \frac{1}{2}ac\sin B\ ,\quad S = \frac{1}{2}bc\sin A\ ,\quad S = \frac{1}{2}ab\sin C$$

• د يوې زاويې د نيمايي مثلثاتي نسبتونه د مثلث د ضلعو د اوږدوالی له جنسه:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\quad \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\quad \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{ab}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\quad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

• د مثلث مساحت د مثلث د ضلعو د اوږدوالی له جنسه:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

• د يوه مثلث د محيطي دايرې شعاع(R) مساوي دی په:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

يا $R = \frac{abc}{4S}$

• د يوه مثلث د محاطي دايرې شعاع د $r = \frac{s}{p}$ يا $r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$ فرمول څخه په لاس راځي.

د څپرکي پوښتنې

1- وښیاست چې د متساوي الاضلاع مثلث مساحت $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ دی، که a د مثلث یوه ضلع وي؟

2- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالي $a = 7cm$ ، $b = 8cm$ او $c = 9cm$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ؟

3- د جمعې د فورمولونو په مرسته $\cos 165°$ او $\sin 165°$ پیدا کړئ؟

4- $\sin(-165°) = ?$ مساوي دی په:

$a)\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\quad b)\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ $\quad c)\ \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

5- وښیاست چې: $\frac{\cos 3\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin 2\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}$ دی.

6- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته، د لاندنیو زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ؟

$\sin(30°+45°)$ $\quad \cos(150°-45°)$ $\quad \tan(30°+60°)$

$\sin(135°+180°)$ $\quad \sin(135°-180°)$ $\quad \tan(180°-45°)$

7- د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته، د لاندېنیو رابطو سموالی وښیاست.

$\sin(90°-\theta) = \cos\theta$ $\quad \cos(90°+\theta) = -\sin\theta$ $\quad \cos(90°-\theta) = \sin\theta$

$\sin(270°+\theta) = -\cos\theta$ $\quad \cos(180°-\theta) = -\cos\theta$ $\quad \sin(180°-\theta) = \sin\theta$

8- که $0° < \theta < 90°$ او $\sin\theta = \frac{2}{5}$ وي، د $\cos 2\theta$ ، $\sin 2\theta$ ، $\cos\frac{\theta}{2}$ او $\sin\frac{\theta}{2}$ قیمتونه په لاس راوړئ؟

9- وښیاست چې:

$\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta} = 2\sin\theta \quad , \quad \cos 2\theta + 1 = 2\cos^2\theta \quad , \quad \cos 2\theta + 2\sin^2\theta = 1$

$2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta = 2\cos 2\theta \quad , \quad \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = \cos\theta - \sin\theta$

10- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتیب سره $5cm$ ، $7cm$ او $8cm$ وي، د دې مثلث د محیطي او محاطي دایرو شعاعګانې پیدا کړئ؟

11- $\sin(180°+\theta)=?$

$a)\ \sin\theta$ $\quad b)\ -\cos\theta$ $\quad c)\ -\sin\theta$ $\quad d)\ \cos\theta$

12- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته وښیاست چې:

$\sec(360°-\theta)=\sec\theta$, $\tan(180°+\theta)=\tan\theta$ او $\sin(360°-\theta)=-\sin\theta$

13- $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=?$

$a)\ 2\sin\alpha\sin\beta$ $\quad b)\ 2\cos\alpha\cos\beta$ $\quad c)\ -2\sin\alpha\sin\beta$

14- وښیاست چې: $\dfrac{\sin\alpha}{\sec 4\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\csc 4\alpha}=\sin 5\alpha$ دی؟

15- لاندې د مثلثاتي نسبتونو ضرب حاصلونه د مجموعې او یا تفاضل په شکل ولیکئ؟

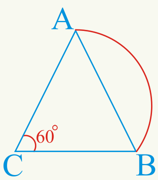
$\cos 100°\sin 50°$ ، $\cos 40°\cos 60°$

$\sin 8\theta\cos 10\theta$ ، $\sin\dfrac{3\theta}{2}\sin\dfrac{5\theta}{2}$

16- لاندې د مثلثاتي نسبتونو مجموعې او یا تفاضل د ضرب د حاصل په څېر ولیکئ؟

$\sin 80°-\sin 72°$. $\sin 12\theta+\sin 8\theta$

17- وښیاست چې: $\dfrac{\sin 5\theta+\sin 3\theta}{\cos 5\theta-\cos 3\theta}=-\cot\theta$ دی.



18- د یوې دایرې مساحت $180cm^2$ دی، ددې دایرې د $80°$ قطاع مساحت پیدا کړئ.

19- د شکل مطابق د $60°$ مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی $(1cm)$ دی. د دې قوس شعاع او د وتر اوږدوالی یې پیدا کړئ؟

-20 $\frac{\tan 60° - \tan 30°}{1 + \tan 60° \cdot \tan 30°} = ?$

$a)\ -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad b)\ \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad c)\ \sqrt{3}$ $\quad d)\ -\sqrt{3}$

-21 که $\sin\theta = \frac{3}{5}$ او د θ دویمه ضلع په لومړۍ ربع کې وي، $\sin 2\theta$ ، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پیدا کړئ؟

-22 وښیاست چې: $\tan(45° + \theta) = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$ دی؟

-23 $\cos 37° \cos 53° - \sin 37° \sin 53°$ مساوي دی په:

$a)\ 1$ $\quad b)\ -1$ $\quad c)\ 0$ $\quad d)$ درې واړه ناسم دي

-24 $\cos 60° \cos 14° + \sin 60° \sin 14°$ مساوي دی په:

$a) \cos 74°$ $\quad b) \cos 46°$ $\quad c) \sin 74°$ $\quad d) \sin 46°$

-25 $\cos 14° \cos 31° - \sin 14° \sin 31°$ مساوي دی په:

$a) \cos 17°$ $\quad b) \cos 45°$ $\quad c) \sin 17°$ $\quad d) -\sin 17°$

-26 $\cos 80° \cos 35° + \sin 80° \sin 35°$ مساوي دی په:

$a) \cos 115°$ $\quad b) \sin 115°$ $\quad c) \cos 45°$ $\quad d) \sin 45°$

-27 که $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ ، $\sin\beta = \frac{5}{13}$ وي، α او β په لومړنی ربع کې واقع وي $\cos(\alpha - \beta)$ پیدا کړئ؟

-28 که $\cos\theta = -\frac{8}{17}$ ، $\cos □ = -\frac{3}{5}$ وي او د θ او └ دویمې ضلعې په دریمه ربع کې واقع وي. $\cos(\theta - □)$ پیدا کړئ؟

-29 وښیاست چې: $\frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{\cos(x - y) + \cos(x + y)} = \tan x \cdot \tan y$ دی.

-30 $\cos(0^\circ - t) = ?$

$a)\sin t$ $b)\cos t$ $c)-\sin t$ $d)-\cos t$

-31 وښیاست چې: $\sin\theta = \dfrac{\cos\theta \cdot \sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}$ دی؟

-32 وښیاست چې:

$$\frac{\cos 8x + \cos 4x}{\cos 8x - \cos 4x} = -\cot 6x \cot 2x$$

$$\frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = -\tan x \quad , \quad \frac{\sin 4x + \sin 6x}{\cos 4x - \cos 6x} = \cot x$$

$$\frac{\sin t + \sin 3t}{\cos t + \cos 3t} = \tan 2t \quad , \quad \frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x - \cos 3x} = -\cot 2x$$

-33 $\cos(x+y)\cos y + \sin(x+y)\sin y$ افاده مساوي ده په:

$a)\sin x$ $b)\cos x$ $c)-\sin x$ $d)-\cos x$

-34 $\sin(x-y)\cos y + \cos(x-y)\sin y = ?$

$a)\sin x$ $b)\cos x$ $c)-\sin x$ $d)-\cos x$

35 – د هغې قطاع مساحت چې شعاع يې $2m$ او مرکزي زاويه يې $0{,}5\ radian$ وي، مساوي ده په:

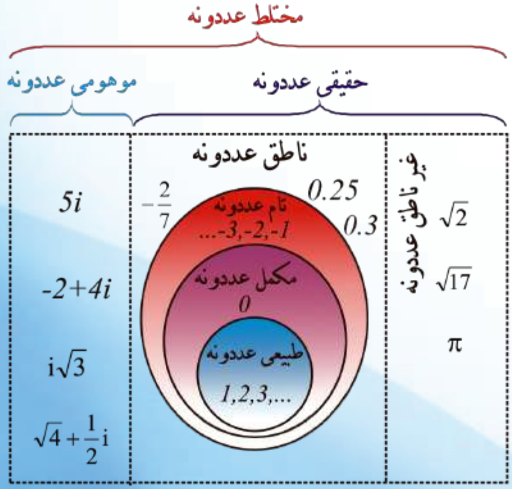
$a)\ 3m^2$ $b)\ 2m^2$ $c)\ 1m^2$ $d)$ درې واړه سمې نه دي

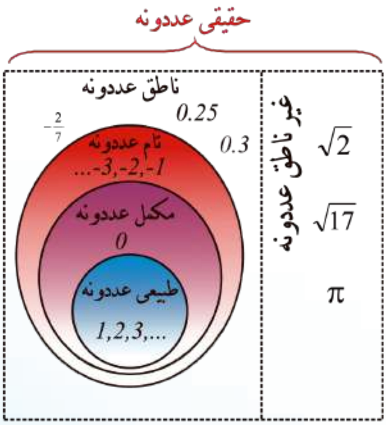
36 – که د يوې دايرې د يوې قطاع مساحت $200cm^2$ او مرکزي زاويه يې 2 radian وي، د دې دايرې شعاع مساوي ده په:

a) 14.14cm b) −14.14cm c) 14cm d) درې واړه غلط دي.

شپږم څپرکی

مختلط عددونه


مختلط عددونه
موهومي عددونه
حقیقي عددونه
5i
-2+4i
$i\sqrt{3}$
$\sqrt{4}+\frac{1}{2}i$
ناطق عددونه
$-\frac{2}{7}$
0.25
0.3
تام عددونه
...-3,-2,-1
مکمل عددونه
0
طبیعي عددونه
1,2,3,...
غیر ناطق عددونه
$\sqrt{2}$
$\sqrt{17}$
π


حقیقي عددونه
ناطق عددونه
$-\frac{2}{7}$
0.25
0.3
تام عددونه
...-3,-2,-1
مکمل عددونه
0
طبیعي عددونه
1,2,3,...
غیر ناطق عددونه
$\sqrt{2}$
$\sqrt{17}$
π


تام عددونه -3,-2,-1
-5,-4,
...-6
مکمل عددونه
0
طبیعي عددونه
1,2,3,...

مختلط عددونه
(Complex Numbers)

$z=\sqrt{3}-2i$

Real Part of $z=?$

Imaginary Part of $z=?$

آیا ویلای شئ چې د $x^2+9=0$ معادله ولې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري؟

آیا پوهېږئ چې د حقیقي عددونو سټ د مختلطو عددونو د سټ یو فرعي سټ دی؟

موهومي عددونه (Imaginary Numbers):

$i=\sqrt{-1}$ یا $i^2=-1$ دی د i توری له یوناني کلمې (iota) څخه اخیستل شوی دی چې $i=\sqrt{-1}$ ته، د موهومي عددونو واحد وایي.

لومړی مثال: $\sqrt{-16}$ پیدا کړئ.

حل: $\sqrt{-16}=\sqrt{(-1)\cdot 16}=\sqrt{-1}\sqrt{16}=i\sqrt{16}=\pm 4i$

دویم مثال: د $x^2+a^2=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$x^2+a^2=0$$
$$x^2=-a^2$$
$$x=\pm\sqrt{-a^2}=\pm\sqrt{(-1)\cdot(a^2)}=\pm a\sqrt{-1}=\pm ai$$

ai او ai − موهومي عددونه دي (چې a یو حقیقي عدد دی).

د (i) طاقتونه (Powers of i):

لیدل کېږي چې د $i^2=-1$ یا $i=\sqrt{-1}$ په مرسته موهومي عددونه ساده کولای شو . په یاد ولرئ چې د حقیقي عددونو مربع مثبت او د موهومي عددونو مربع منفي ده.

$$i=\sqrt{-1} \qquad i^2=(\sqrt{-1})^2=-1 \qquad i^3=i^2\cdot i=(-1)\cdot(i)=-i$$

$$i^4=(\sqrt{-1})^4=[(\sqrt{-1}^2)]^2=(-1)^2=1 \quad \text{یا} \quad i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$$

$$i^5=i^4\cdot i=(1)(i)=i \qquad i^6=(i)^4\cdot(i)^2=(1)\cdot(-1)=-1$$

$$i^7 = (i)^6 \cdot (i) = (-1)\cdot(i) = -i \qquad i^8 = i^7 \cdot i = (-i)\cdot(i) = -i^2 = -(-1) = 1$$

(i) ته موهومي واحد وايي.

له دې ځایه نتیجه په لاس راځي، که د موهومي واحد توان $n=4$ یا یوداسې عددوي چې پر څلورو د وېش وړوي، نو له یوه (1) سره مساوي دی.

دریم مثال:

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1 = 1$$
$$i^{12} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$
$$i^{16} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$
$$\vdots$$
$$i^{4n} = i^4 \cdot i^4 \ldots i^4 = 1$$
$$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = 1\cdot i = i$$
$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = 1\cdot(-1) = -1$$
$$i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^2 \cdot i = 1(-1)i = -i$$

فعالیت

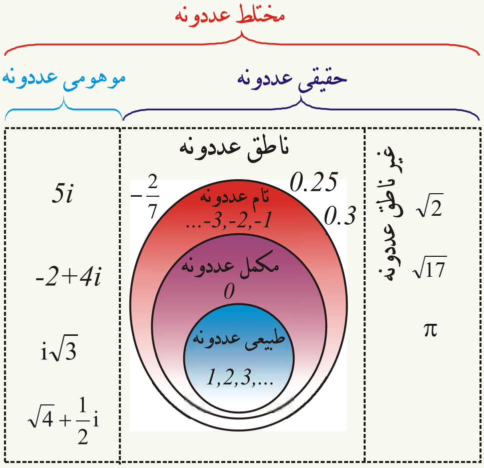
$(i)^{61}, (i)^{-37}$ و $(i)^{256}$ طاقتونو قیمت پیداکړئ.

څلورم مثال: i^{54}، i^{1998} او i^{89} پیداکړئ.

حل: که د 54 عدد پر 4 ووېشو، پاتې (باقي) یې 2 ده، نو:

$$i^{54} = i^{52} \cdot i^2 = i^{4\cdot 13} \cdot i^2 = (i^4)^{13} \cdot i^2 = (1)\cdot i^2 = (1)\cdot(-1) = -1$$
$$i^{1998} = i^{4(499)} \cdot i^2 = 1\cdot i^2 = i^2 = -1$$
$$i^{89} = i^{4\cdot 22} \cdot i = 1\cdot i = i$$

هغه عددونه چې $\sqrt{-1}$ یې یو فکتور وي، د موهومي عددونو په نوم یادېږي. د i طبیعي توانونه یو له i، 1، $-i$ او -1 عددونو څخه دي. د حقیقي عددونو مربع مثبت اود موهومي عددونو مربع منفي ده.



د عددونو سټونه د تاریخ په اوږدوکې د ارتیاوو او د ریاضي د علم له انکشاف سره سم منځ ته راغلي دي، لکه: څرنګه چې پوهېږئ، د طبیعي عددونو سټ $IN = \{1,2,3,4....\}$ ټولو مسألو ته ځواب نه شي ویلای. د مثال په ډول د $3x = 0$ معادله د طبیعي عددونو په سټ کې حل نه لري، ښکاره خبره ده چې ځواب یې $x = 0$ دی، نو یو بل سټ ته ارتیا پیدا شوه چې د مکملو عددنو سټ $W = \{0,1,2,3,...\}$ دی. دا سټ هم ځینو پوښتنو ته ځواب نه شي ورکولای، لکه: د $x + 2 = 0$ معادله د مکملو عددونو په سټ کې حل نه لري، ځکه چې ځواب یې $x = -2$ دی چې 2 - د مکملو عددونو په ست کې شامل نه دی، نو یو بل سټ ته ارتیا پیدا شوه چې منفي عددونه هم ولري چې د تامو عددونو د سټ (Integer Numbers set) یا $I = \{...,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ په نامه یادېږي، خو د عددونو په دې سټ کې هم د $2x + 1 = 2$ د معادلې حل نشته، ځکه چې حل یې $x = \frac{1}{2}$ دی، نو د ناطقو عددونو سټ (Rational Numbers Set) منځ ته راغی خو د $x^2 - 2 = 0$ معادله د ناطقو یاګویا عددونو په سټ کې هم حل نه لري، ځکه چې، ددې معادلې حل $x = \sqrt{2}$ دی چې $\sqrt{2}$ د غیرو ناطقو عددونو (Irrational Numbers set) په سټ کې شامل دی، نو د غیر ناطقو عددونو سټ منځ ته راغی د ناطقو او غیر ناطقو عددونو د سیټونو مجموعې ته د حقیقي عددونو سټ (Real Numbers Set) وایي.

خود حقیقي عددونو سټ هم ځینو پوښتنو ته ځواب نه شي ورکولای، لکه: د $x^2 + 16 = 0$ یا د $x^2 + 1 = 0$ د معادلو حل د حقیقي عددونو په سټ کې نه شته دی.

یا په بل عبارت منفي عددونه د حقیقي عددونو په سټ کې جفت جذر نه لري، لکه: $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-25}$ او نور، خو هغه معادلې چې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري. په 1795م. کال کې یو جرمني ریاضي پوه گوس (Gauss) د مختلطو عددونو مفهوم په لاندې ډول وړاندې کړ. که یو مختلط عدد په z سره وښایو $z = a + bi$ چې د یو مختلط عدد معیاري شکل دی چې a د z عدد حقیقي برخه (Real Part of z) او bi د z د مختلط عدد موهومي برخه (Imaginary Part of z) ده، د مختلطو عددونو سټ داسې تعریف کېږي.

$C = \{z \mid z = a + bi \ , \ a, b \in IR \ , \ i^2 = -1\}$ د z یو مختلط عدد د یوې مرتبې جوړې په شکل هم لیکلای شو : $z = a - bi = (a, -b)$, $z = a + bi = (a, b)$ که a=0 شي: $Z = 0 + bi = bi$ چې bi ته خالص موهومي عدد (Pure imaginary number) وایي او که $b = 0$ وي، نو $z = a + 0 \cdot i = a$ (چې a یو خالص حقیقي عدد (Pure real number) دی) په یاد ولرئ چې مختلط عددونه، لکه: حقیقي عددونه د ترتیب خاصیت نه لري.

صفري مختلط عدد (Zero Complex Number):

هغه عدد دی چې حقیقي او موهومي دواړه برخې یې صفرونه وي. $(a = 0 \quad b = 0)$، نو $z = a + bi = 0 + 0i = 0$ صفري مختلط عدد دی.

فعالیت

په $4 + 3i$ او $2 - 5i$ مختلطو عددونو کې حقیقي او موهومي برخې وښیاست.

لومړی مثال: د $1 - i$, $\sqrt{3} - 3i$, $5i$ او $2 - 5i$ په مختلطو عددونو کې حقیقي او موهومي برخې وښیاست.

حل: په $1 - i$ کې حقیقي برخه یې 1 او موهومي برخه یې $-i$ ده.

د $\sqrt{3}-3i$ مختلط عدد کې حقیقي برخه يې $\sqrt{3}$ او موهومي برخه يې $-3i$ ده، په $2-5i$ مختلط عدد کې حقیقي برخه يې 2 او موهومي برخه يې $-5i$ ده.

په $5i$ کې حقیقي برخه صفر او موهومي برخه يې $5i$ ده.

دويم مثال: د $6i$, -9 , 0 , $9-i$ او $i-1$ مختلط عددونه په معياري شکل (Standard Form) ولیکئ.

حل: څرنګه چې $z=a+bi$ ته د مختلط عدد معياري شکل وايي چې a ته د مختلط عدد حقیقي برخه او bi يې موهومي برخه ده. په لاندې جدول کې پورتني مختلط عددونه په معياري شکل بنودل شوي دي.

معیاری شکل $(z=a+bi)$	مختلط عددونه
$0+6i$	$6i$
$-9+0i$	-9
$0+0i$	0
$9-i$	$9-i$
$-1+i$	$i-1$

$z=a+bi$ د يوه مختلط عدد معياري شکل دی چې a ته د مختلط عدد حقیقي برخه او bi يې موهومي برخه ده، که $a=0$ وي، نو bi خالصه موهومي برخه او که $b=0$ وي، نو a د مختلط عدد خالصه حقیقي برخه ده او هغه معادلې چې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري.

پوښتنې

1- د $(i)^{-33}, (i)^{79}, (i)^{202}, (2i)^2$ او $(3i)^2$ قيمتونه پيداکړئ.

2- لاندې عددونه د مختلطو عددونو په معياري شکل وليکئ.

$-i-4 \quad , \quad 5i \quad , \quad -4i+\sqrt{2} \quad , \quad -3i$

3 - $7-i\ , 5+3i\ , -3i$ $\quad \sqrt{5}-\sqrt{7}i$ مختلط عددونه د مرتبو جوړو په شکل وليکئ.

4- د $-i$ په مختلط عدد کې حقيقي برخه مساوي ده په:

a) 1 , b) -1 , c) 0 , d) 2

5- د $\sqrt{-16}$ عدد جذر مساوي دی په:

a) ± 4 , b) -4 , c) $\pm 4i$, d) ± 2

د موهومي عددونو څلورګوني عمليې

$4i+3i=7i$

$4i-3i=i$

$4i-(-3i)=7i$

آیا د $3i$ او $4i$ موهومي عددونه جمع کولای شئ؟

آیا د $10i$ او $50i$ موهومي عددونو د ضرب حاصل یو حقیقي عدد دی؟

د موهومي عددونو جمع او تفریق: موهومي عددونه کولای شو چې په لاندې ډول یې جمع او تفریق کړو.

a: د جمعې عملیه: د دوو موهومي عددونو د جمعې حاصل یو موهومي عدد دی.

لومړی مثال: د $(7i+8i)$ او $5i$ او $\sqrt{7}i$ د جمعې حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$7i+8i=(7+8)i=15i$$

$$\sqrt{7}i+5i=(\sqrt{7}+5)i$$

b: د تفریق علمیه: د دوو عددونو د تفریق حاصل یو موهومي عدد دی.

دویم مثال: $7i-4i$ او $9i-13i$ د تفریق حاصل پیدا کړئ.

$$7i-4i=(7-4)i=3i$$

$$9i-13i=(9-13)i=-4i$$

c: د ضرب عملیه: د دوو موهومي عددونو د ضرب حاصل یو حقیقي (Real number) عدد دی.

دریم مثال: د $(10i)\cdot(5i)$ او $(\sqrt{9}i)\cdot(\sqrt{4}i)$ د ضرب حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$(10i)\cdot(5i)=(10)\cdot(5)\cdot i\cdot i=50i^2=-50$$

څکه چې $i^2=-1$ دی نو $50i^2=50\cdot(-1)=-50$ چې -50 یو حقیقي عدد (Real number) دی.

همدارنګه $(\sqrt{4}i)\cdot(\sqrt{9}i)=\sqrt{4\cdot 9}\cdot i\cdot i=\sqrt{36}\cdot i^2=6\cdot(-1)=-6$

د موهومي عددونو د ضرب په عمليه کې د تبديلي خاصيت (Commutative Property)

صدق کوي يعني: $\boxed{(ai)\cdot(bi)=(bi)\cdot(ai)=-ab}$

فعاليت

$(\frac{2}{3}i)\cdot(-\frac{3}{5}i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

d : **د وېش عمليه**: د دوو موهومي عددونو دوېش حاصل يو حقيقي عدد دی.

څلورم مثال: $\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}}$ ، $\frac{5i}{7i}$ او $\frac{\sqrt{13}\ i}{\sqrt{3}\ i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

حل:

1) $\frac{5i}{7i}=\frac{5}{7}$ ($\frac{5}{7}$ يو حقيقي عدد دی)

2) $\frac{\sqrt{13}\,i}{\sqrt{3}\ i}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ ($\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ يو حقيقي عدد دی)

3) $\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}\,i}{\sqrt{5}\,i}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

فعاليت

$36i$ پر $-2i$ ووېشئ.

د موهومي عددونو د جمعې او ضرب په عمليو کې د تبديلي خاصيت صدق کوي. د دوو موهومي عددونو د ضرب او وېش حاصل يو حقيقي عدد دی.

پوښتنې

1) جمع يې کړئ. $\sqrt{7}\,i+\sqrt{7}\,i$, $\sqrt{-7}+\sqrt{-4}$, $\sqrt{-1}b+\sqrt{-1}c$

2) تفريق يې کړئ. $5i-2i$, $12i-7i$, $\sqrt{5}\,i-\sqrt{5}\,i$

3) لاندې موهومي عددونه سره ضرب او تقسيم کړئ.

$(\frac{7}{4}i)(-\frac{2}{9}i)$, $(\sqrt{7}\,i)\cdot(-7i)$, $(3i)\cdot(5i)$, $\frac{16i}{-4i}$, $\frac{13i}{26i}$

د مختلطو عددونو د جمعې او تفریق عملیې:

آیا د $3x-2yi=6+i$ له مساوات څخه د x او y قیمتونه په لاس راوړلای شئ؟

آیا پوهېږئ چې کوم عدد ته د مختلطو عددونو د جمعې د عملې د عینیت عنصر وایي؟



مساوي مختلط عددونه (Equal Complex Numbers): دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقیقي او موهومي برخې یو له بله سره مساوي وي. د $z_1=a+bi$ او $z_2=x+yi$ عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې $x=a$ او $y=b$ وي.

لومړی مثال: که چېرې $z_1=x_1+2y_1i$ او $z_2=3-5i$ وي، نو هغه وخت $z_1=z_2$ دی چې: $x_1=3$ او $y_1=-\frac{5}{2}$ وي.

فعالیت

1- که چېرې $z_1=\sqrt{2}\,x+\sqrt{3}\,yi$ او $z_2=-5-6i$ وي، د $z_1=z_2$ له مخې د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

2- که چېرې $2+mi=k+3i$ وي د m او k حقیقي عددونو قیمت پیدا کړئ.

د مختلطو عددونو د جمعې عملیه: د مختلطو عددونو د جمعې عملیه داسې تعریف شوې ده. که چېرې $z_1=a+bi$ او $z_2=c+di$ وي، نو:

$$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)\cdot i$$

یا په بل عبارت د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل یو بل داسې مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د دواړو عددونو د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د دې دواړو عددونو د موهومي برخو له مجموعې څخه په لاس راغلي وي.

دویم مثال: که چیرې $z_1 = 2-3i$ او $z_2 = 3+4i$ وي، $z_1 + z_2$ پیدا کړئ

$$z_1 + z_2 = (2-3i)+(3+4i) = (2+3)+(-3+4)i = 5+i$$

په همدې ډول:

$$(3-4i)+(-2+6i) = (3-2)+(-4+6)i = 1+2i$$

$$(-9+7i)+(3-15i) = (-9+3)+(7-15)i = -6-8i$$

$0+0i$ د مختلطو عددونو د جمعې د عملیې د عینت عنصر (additive identity) دی، ځکه چې: $(a+bi)+(0+0i) = (a+0)+(b+0)i = a+bi$.

همدارنګه د $a+bi$ عدد جمعي معکوس (additive inverse) د $-a-bi$ عدد دی، ځکه چې:

$$(a+bi)+(-a-bi) = (a-a)+(b-b)i = 0+0i$$

فعالیت

د $(3x-yi)+(5x+3yi)$ د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

د مختلطو عددونو د تفریق عملیه: د دوو مختلطو عددونو د تفریق حاصل یو بل داسې مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د موهومي برخو د تفریق له حاصل څخه په لاس راغلي وي یعنې: $(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$

لومړی مثال: $(-4+3i)-(6-7i) = (-4+3i)+(-6+7i) = -10+10i$

دویم مثال: $(12-5i)-(8-3i) = (12-8)+(-5+3i)i = 4-2i$

دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقيقي او موهومي برخې يو له بله سره مساوي وي. د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل يو داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د حقيقي برخو اوموهومي برخه يې د موهومي برخو له مجموعې څخه په لاس راغلي وي، په همدې ډول د دوو مختلطو عددونو د تفريق حاصل يو داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د دواړو عددونو د حقيقي برخو او موهومي برخه يې د دواړو عددونو د موهومي برخو له حاصل تفريق څخه په لاس راغلي وي.

پوښتنې

1- لاندې مختلط عددونه جمع کړئ.

$(13-12i)+(13+12i)$ ، $(2+5i)+(3+4i)$

$(\sqrt{3}-ci)+(d+5ci)$ ، $(-3+6i)+(10-7i)$

2- لاندې مختلط عددونه يو له بله تفريق کړئ.

$(5-i)-(7+3i)$

$(2\sqrt{3}+5\cdot\sqrt{7}\,i)-(\sqrt{3}+3\sqrt{7}\,i)$

$(3c+4di)-(3c+8di)$

3- د لاندې مختلطو عددونو جمعي معکوس پيدا کړئ.

$2+3i$, $(2,-3)$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i$

4 – که $(x, y \in IR)$ او $3x+2iy-ix+5y=7+5i$ وي، د x او y قيمتونه پيدا کړئ.

5- لاندې عمليې سرته ورسوئ او خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل وليکئ

$(2+3i)+(-5+2i)$

$(-5-4i)-(-2-\sqrt{2}i)$

$(2+3i)+(-5-i)$

$(6-5i)+(3+2i)$

$(3.7+6.1i)-(1+5.9i)$

$(8+\frac{3}{4}i)-(-7+\frac{2}{3}i)$

$(-6-\frac{5}{8}i)+(4+\frac{1}{2}i)$

$(-2+5i)+(3-i)$

$(3+\frac{3}{5}i)-(-11+\frac{7}{15}i)$

$(-4-\frac{5}{6}i)+(13+\frac{3}{8}i)$

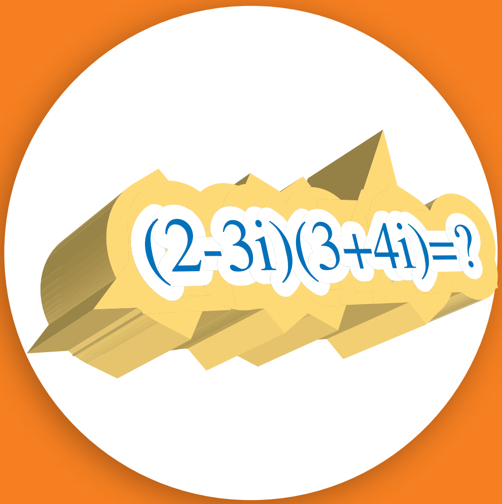
$(-7-\sqrt{-72})+(8+\sqrt{-50})$

$(\sqrt{3}+\sqrt{-2})-(\sqrt{12}+\sqrt{8})$

6- د لاندي مختلطو عددونو جمعي معکوس پیداکړئ.

$2-3i$	$8+11i$	$1-i$	$-1+i$
$5-8i$	$-13+13i$	$-5i$	$2i$

د مختلطو عددونو ضرب



آیا کولای شئ چې د $(2-3i)(3+4i)$ مختلطو عددونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ؟

د $i^2=-1$ په نظر کې نیولو سره د دوو مختلطو عددونو ضرب په لاندې ډول دی که: $z_1=a+bi$ او $z_2=c+di$ وي.

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bidi\\&=ac+adi+bci+bdi^2\\&=ac+(ad+bc)i+bd(-1)\\z_1\cdot z_2&=(ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

لومړی مثال: د $(5-4i)\cdot(7-2i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\begin{aligned}(5-4i)(7-2i)&=5(7)+5(-2i)+(-4i)(7)-4i(-2i)=35-10i-28i+8i^2\\&=35-38i+8(-1)\\&=35-38i-8\\&=27-38i\end{aligned}$$

فعالیت

د $(2-3i)(3+4i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

خرنګه چې $(a+bi)(1+0i)=a\cdot1+a\cdot0i+bi\cdot1+bi\cdot0i=a+bi$ دی، نو $1+0i$ ته د مختلطو عددونو د ضرب د عملیې د عینیت عنصر (Multiplicative identity) وایي

لکه: $(3+5i)(1+0i)=3+5i$

د یوه مختلط عدد مزدوج (Conjugate of a Complex Number):

د $z = x + yi$، د مختلط عدد مزدوج $\bar{z} = x - yi$ دی په دې ډول چې:

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$$

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x \quad , \quad 2x\,Re(z)$$

$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi \quad , \quad 2yi\,Im(z)$$

دویم مثال: د $z = 3 + 4i$ د عدد مزدوج $\bar{z} = 3 - 4i$ دی، $z + \bar{z}$, $z - \bar{z}$ او $z \cdot \bar{z}$ په لاس راوړئ:

$$z \cdot \bar{z} = (3 + 4i) \cdot (3 - 4i) = 3(3) + 3(-4i) + 4i(3) + 4i(-4i)$$

$$= 9 - 16i^2 = 9 - 16(-1) = 9 + 16 = 25$$

$z + \bar{z} = (3 + 4i) + (3 - 4i) = 6$ (6 یو حقیقي عدد دی)

$z - \bar{z} = (3 + 4i) - (3 - 4i) = 8i$ (8i یو موهومي عدد دی)

فعالیت

د $z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = 7 + i$ او $z_3 = \sqrt{5} + \sqrt{7}i$ مختلطو عددونو مزدوجونه پیدا کړئ.

څرنګه چې وموليدل، د یو مختلط عدد د مزدوج د پیدا کولو لپاره، یوازې د موهومي برخې علامه تغیروو لکه:

مزدوج یې	عدد
i	-i
1+i	1-i
-4-2i	-4+2i
-5i-6	5i-6

د یو مختلط عدد ضربي معکوس (Multiplicative inverse)

پوهیږو چې د $a + bi$ د عدد مزدوج $a - bi$ دی او

$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (b^2 i^2) = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2$ دی.

د $a+bi$ عدد د ضربي معکوس د پیداکولو له پاره د $\frac{1}{a+bi}$ عدد د مختلط عدد په معیاري شکل لیکو، نو د $\frac{1}{a+bi}$ د عدد صورت او مخرج په $a-bi$ کې ضربوو. ($a-bi$ د مخرج مزدوج دی)

$$\frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi}=\frac{(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

د $(a+bi)$ د عددضربي معکوس $(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i)$ دی.

دریم مثال: د $2-3i$ د عدد ضربي معکوس پیدا کړئ.

$$\frac{1}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{2+3i}{4-9i^2}=\frac{2+3i}{4+9}=\frac{2+3i}{13}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$$

څلورم مثال: د x^2+4 افاده تجزیه کړئ.

$$x^2+4=x^2-(-1)\cdot4=x^2-(i)^2\cdot4=x^2-(2i)^2=(x-2i)(x+2i)$$

فعالیت

د $5+3i$ او $\sqrt{2}-4i$ مختلطو عددونو ضربي معکوس پیدا کړئ.

که چېرې $z=x+yi$ او $w=x'+y'i$ دوه مختلط عددونه وي، نو $z\cdot w$ په دې ډول تعریف شوی دی.

$$z\cdot w=(xx'-yy')+(xy'+x'y)i$$

د یو مختلط عدد د مزدوج د پیداکولو لپاره یوازې د موهومي برخې علامه تغیرو او د $a+bi$ د مختلط عدد ضربي معکوس $(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i)$ دی.

پوښتنې

1- لاندې مختلط عددونه سره ضرب کړئ.

$(2+i)(3-2i)$, $(3+i)(3-i)$

$(-2+3i)(4-2i)$, $(2-5i)(2+5i)$

$(5+2i)(5-3i)$, $(\sqrt{6}+i)(\sqrt{6}-i)$

$(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)$

2- د لاندې مختلطو عددونو ضربي معکوس پیدا کړئ.

$1-i$, $2+4i$, $5-3i$, $3a-4bi$, $(7,4)$

3- لاندې افادې تجزیه کړئ.

x^2+16 , x^2+8 , x^2+5 , x^2+7

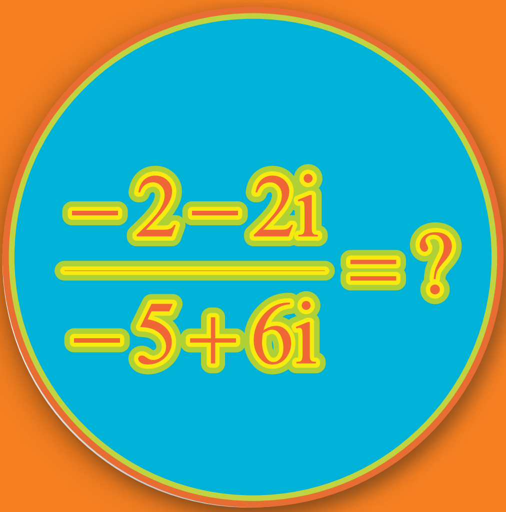
4- د $(-3+2i)^2$ او $(2+i)^2$ قیمتونه په لاس راوړئ.

5- که $z=4-3i$ وي، $8z-z^2$ پیدا کړئ.

6- دا معادله حل کړئ. $x+yi=(2-3i)(2+3i)$.

7- وښیاست چې: $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ، د i مربع جذر دی.

8- وښیاست چې: $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ د $-i$ دریم جذر دی.



د دوو مختلطو عددونو ویش
Division of two complex numbers

آیا د $\frac{-2-2i}{-5+6i}$ د ویش حاصل (خارج قسمت) په لاس راوړلای شئ؟

څرنګه چې د $\frac{a+bi}{c+di}$ عدد په مخرج کې c حقیقي عدد او di موهومي عدد دی، نو لومړی باید مخرج په حقیقي عدد بدل کړو، ددې لپاره صورت او مخرج، د مخرج په مزدوج کې ضربوو چې دې عملیې ته ګویا کول (Rationalization) وایي.

لومړی مثال: د $\frac{4+3i}{2+5i}$ د ویش حاصل په لاس راوړئ.

حل: د $2+5i$ مزدوج $2-5i$ دی، صورت او مخرج د مخرج په مزدوج یا $2-5i$ کې ضربوو.

$$\frac{4+3i}{2+5i}=\frac{4+3i}{2+5i}\cdot\frac{2-5i}{2-5i}=\frac{8-20i+6i-15i^2}{4-10i+10i-25i^2}=\frac{8-14i-15(-1)}{4-25(-1)}$$

$$=\frac{23-14i}{29}=\frac{23}{29}-\frac{14}{29}i$$

لیدل کیږي چې د ویش په حاصل کې حقیقي او موهومي برخې سره جلا دي.

فعالیت

د $\frac{1+i}{1-i}$ د ویش حاصل په لاس راوړئ او خپل ځواب د مختلط عدد په معیاري شکل ولیکئ.

تعریف

که $z_1=a+bi$ او $z_2=c+di$ وي، $\frac{z_1}{z_2}$ په لاندې ډول تعریف شوی دی

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2}=\frac{ac+bd-(ad-bc)i}{c^2+d^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{ad-bc}{c^2+d^2}i$$

دویم مثال: د $z_1=2-3i$ عدد پر $z_2=1+i$ وویشئ او بیا یې امتحان کړئ.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-3i}{1+i}=\frac{(2-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-1-5i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$$

$$(1+i)(-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i)=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i-\frac{1}{2}i-\frac{5}{2}i^2=-\frac{1}{2}-3i+\frac{5}{2}=2-3i$$

دریم مثال: د $\frac{3+2i}{5-i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\frac{3+2i}{5-i}=\frac{(3+2i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}=\frac{15+3i+10i+2i^2}{25-i^2}=\frac{15+13i-2}{25+1}=\frac{13+13i}{26}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

که $z=x+yi$ او $w=x'+y'i$ دوه مختلط عددونه وی، نو $\frac{z}{w}$ داسې تعریف شوی دی.

$$\frac{z}{w}=\frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2}+\frac{x'y-xy'}{x'^2+y'^2}i \quad , \quad (x'^2+y'^2\neq 0)$$

د یو مختلط عدد د مزدوج خاصیتونه:

که z_1 او z_2 دوه مختلط عددونه وي:

1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

2) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$ 4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

5) $z + \overline{z} = 2x$ 6) $z - \overline{z} = 2yi$

7) $\overline{\overline{z}} = z$

لومړی مثال: که $z_1 = 4 + 5i$ او $z_2 = -3 + 2i$ وي، وښیاست چې:

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ او $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

حل:

$$z_1 + z_2 = (4+5i) + (-3+2i) = 1 + 7i \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = 1 - 7i$$
$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (4-5i) + (-3-2i) = 1 - 7i$$

په پایله کې $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = (4+5i)\cdot(-3+2i) = -12 - 10 + (8-15)i = -22 - 7i$$
$$\Rightarrow \overline{z_1 \cdot z_2} = -22 + 7i$$
$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (4-5i)\cdot(-3-2i) = -12 - 8i + 15i + 10i^2 = -12 - 8i + 15i - 10$$
$$= -22 + 7i$$

په پایله کې: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$

دویم مثال: که $z = x + yi$ وي $z + \overline{z}$ او $z - \overline{z}$ پیداکړئ.

حل: $z - \overline{z} = (x+yi) - (x-yi) = 2yi$, $z + \overline{z} = (x+yi) + (x-yi) = 2x$

فعالیت

که $z = 2 + 3i$ وي، $Z + \overline{Z}, \overline{\overline{Z}}$ او $Z - \overline{Z}$ پیداکړئ.

پوښتنې

1- د ویش حاصل یې پیدا کړئ:

$$\frac{1+i}{1-1} \quad , \quad \frac{3-4i}{2-5i} \quad , \quad \frac{5-2i}{6-i} \quad , \quad \frac{7-i}{3-5i}$$

2- که $z_1=-a-3bi$ او $z_2=2a-3bi$ وي. وښیاست چې:

$\overline{z_1 \cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ او $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ دی.

3- د ویش حاصل پیداکړئ او خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل ولیکئ.

$$a:\frac{2}{5-i} \qquad b:\frac{3-i}{2+i} \qquad c:\frac{2-3i}{3}$$

4- د $\dfrac{6+\sqrt{-36}}{3+\sqrt{-9}}$ د ویش حاصل مساوي دی په:

$a:1 \qquad b:2 \qquad c:3i \qquad d:-2$

5- خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل ولیکئ.

$$\frac{3+4i}{4i} \qquad \frac{-5}{2-3i} \qquad \frac{6}{1+3i}$$

$$\frac{7}{7-2i} \qquad \frac{-4+8i}{2-4i} \qquad \frac{3-2i}{-6+4i}$$

$$\frac{1}{i}$$

د مختلطو عددونو په ساحه کې د دويمې درجې يو مجهوله معادلې حل:

$$x^2+x+4=0$$
$$x_1=?$$
$$x_2=?$$

آيا د $x^2+x+4=0$ معادلې جذرونه پيدا کولای شئ؟

د يوې دويمې درجې يو مجهوله معادلې عمومي شکل $ax^2+bx+c=0$ ، $(a\neq 0)$ دی.

که $\Delta=b^2-4ac>0$ معادله دوه د مختلفو علامو لرونکي حقيقي جذرونه لري.

که $\Delta=0$ معادله دوه مساوی جذرونه لري.

که $\Delta<0$ معادله د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري، خو د مختلطو عددونو په ساحه کې دوه جذرونه لري.

لومړی مثال: د $x^2-10x+26=0$ معادله حل کړئ.

حل: $a=1 \quad b=-10 \quad c=26$ دي.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot26}}{2\cdot1}=\frac{10\pm\sqrt{-4}}{2}$$
$$=\frac{10\pm 2i}{2}=5\pm i \qquad \Rightarrow \qquad x_1=5+i \qquad x_2=5-i$$

فعاليت

دا جذرونه په پورتنی معادله کې وضع او امتحان يې کړئ.

دويم مثال: د $4x^2+4i\ x+15=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\Delta=b^2-4ac=(4i)^2-4\cdot4\cdot15=16i^2-240=-256$$
$$\pm\sqrt{\Delta}=\pm\sqrt{-256}=\pm\sqrt{256(-1)}=\pm16i$$

$$x_1 = \frac{-4i+16i}{2\cdot 4} = \frac{12i}{8} = \frac{3}{2}i$$
$$x_2 = \frac{-4i-16i}{8} = -\frac{5}{2}i$$

دریم مثال: $x^2+3ix-2=0$ معادله د محمد بن موسی د فورمول په مرسته، د مختلطو عددونو په ساحه کې حل کړئ.

$$\Delta = b^2-4ac = (3i)^2-4\cdot 1\cdot(-2) = 3^2\cdot i^2+8 = -9+8 = -1$$
$$\pm\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$
$$x_{1,2} = \frac{-3i\pm i}{2\cdot 1} \qquad x_1 = \frac{-4i}{2} = -2i \qquad x_2 = \frac{-2i}{2} = -i$$

فعالیت

د $x^2+3=0$ ، $x^2-6x+18=0$ او $x^2-4x+13=0$ معادلې حل کړئ.

پوښتنې

1) هغه دویمه درجه معادله پیدا کړئ چې جذرونه یې $(3+2i)$ او $(3-2i)$ وي.

2) لاندې معادلې حل کړئ.

$$x^2-4x+13=0 \;,\; x^2-6x+18=0 \;,\; -4x^2+3x-5=0$$
$$x^2+8x+41=0 \;,\; x^4-1=0 \;,\; 3x^2+x+2=0$$

3) داسې دویمې درجې معادلې په لاس راوړئ چې جذرونه یې په لاندې ډول راکړل شوي دي.

$2+5i \;,\; 2-5i$	$1+i \;,\; 1-i$
$4i \;,\; -4i$	$5i \;,\; -5i$
$2i \;,\; 3i$	$i \;,\; \frac{1}{i}$
$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i \;,\; \frac{2}{3}-\frac{1}{2}i$	$2-i \;,\; 2+i$

د څپرکي لنډيز

- منفي عددونه د حقيقي عددونو په سټ کې جفت جذرنه لري، خو د مختلطو عددونو په سټ کې منفي عددونه جفت جذر لري.
- مختلط عددونه د حقيقي او موهومي عددونو له يو ځای کېدو څخه په لاس راځي.
- د حقيقي عددونو مربع مثبت، خو د موهومي عددونو مربع منفي ده

$$i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

- داسې عددونو ته چې $\sqrt{-1}$ يې يو فکتور وي، موهومي عددونه وايي.
- د مختلطو عددونو سټ C په لاندې ډول تعريف شوی دی:

$$C = \{z / z = a + bi, \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{IR}, \mathrm{i} = \sqrt{-1}\}$$

- د يو مختلط عدد معياري شکل $\mathrm{z = a + bi}$ دی چې a ته د z د عدد حقيقي برخه او bi ته د z موهومي برخه وايي يا $a = \mathrm{Re}(z)$ او $\mathrm{bi = Im\,g(z)}$
- د i د مختلفو توانونو د پيداکولو لپاره د i توان پر 4 وېشو چې له يوه سره مساوي کېږي او که پوره پرې نه وېشل کېږي، نو د i د توري توان پر 4 د وېشلو له پاتې (باقي مانده) سره مساوی دی، لکه:

$$\mathrm{(i)^{1379} = i^{4 \cdot 344} \cdot i^3 = (1)(i)^3 = -i} \quad \text{يا} \quad i^{4k+r} = i^r$$

- که د $\mathrm{z = a + bi}$ په مختلط عدد کې $b = 0$ وي، نو a ته خالص حقيقي عدد او که $a = 0$ وي، bi ته خالص موهومي عدد وايي.
- هغه مختلط عدد چې حقيقي او موهومي برخې يې دواړه صفرونه وي، صفري مختلط عدد ورته وايي. $\mathrm{(a = 0, b = 0)}$
- دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقيقي او موهومي برخې يو له بله سره مساوي وي. $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ او $\mathrm{Im\,g}(z_1) = \mathrm{Im\,g}(z_2)$
- د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل يو بل داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د دواړو عددونو د حقيقي برخو او موهومی برخه يې د دواړو عددونو د موهومي برخو له مجموعې

څخه عبارت ده.

- د دوو مختلطو عددونو د تفریق حاصل داسې یو مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د دواړو عددونو د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د دواړو عددونو د موهومي برخو د تفریق له حاصل څخه عبارت ده.
- که $z_1 = x_1 + y_1 i$ او $z_2 = x_2 + y_2 i$ وي، نو د مختلطو عددونو د جمعې، تفریق، ضرب او وېش عملیې داسې تعریف شوي دي.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

$$z_1 . z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2} . i \quad , \quad (z_2 \neq 0)$$

- د $z = x + yi$ مختلط عدد مزدوج له $\overline{Z} = x - yi$ څخه عبارت دی.

$$z\overline{z} = x^2 + y^2 \qquad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$z + \overline{z} = 2x \qquad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$z - \overline{z} = 2yi \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

- د $z = a + bi$ عدد جمعي معکوس $-a - bi$ دی او ضربي معکوس یې $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$ دی.
- $0 + 0i = (0,0)$ د مختلطو عددونو د جمعې د عملیې د عینیت عنصر او $1 + 0i$ د ضرب د عملیې د عینیت عنصر دی.
- هغه دویمه درجې معادلې چې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري.

د فصل پوښتنې:

1) $(i)^{51}$ مساوي دي په:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

2) i^{-98} موهومي عدد مساوي دی په:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

3) i^{67} موهومي عدد مساوي دی په:

a) $-i$ b) 1 c) -1 d) i

4) $7i-4i$ مساوي دی په:

a) $-3i$ b) $3i$ c) 3 d) -3

5) $3i\cdot 4i$ مساوي دی په:

a) -12 b) 12 c) $12i$ d) $-12i$

6) $\frac{64i}{8i}$ مساوي دی په:

a) -8 b) 8 c) $8i$ d) $-8i$

7) $\frac{7}{9}i\cdot\frac{2}{9}i$ مساوي دی په:

a) $-\frac{14}{81}$ b) $\frac{14}{81}$ c) $-\frac{14}{81}i$ d) $\frac{14}{81}i$

8) $\frac{\sqrt{-11}}{\sqrt{-5}}$ مساوي دی په:

a) $\sqrt{\frac{11}{5}}$ b) $\frac{-11}{5}$ c) $\frac{-11}{5}i$ d) $\frac{11}{5}i$

9) $\frac{\sqrt{-1}\sqrt{5}}{\sqrt{-1\cdot 5}}$ مساوي دی په:

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{5}{3}i$ d) درې واړه سم نه دي

10) $-\frac{xi}{\sqrt{yi}}$ مساوي دی په:

a) $\frac{x}{\sqrt{y}}$ b) $\frac{-x}{\sqrt{y}}$ c) $\frac{xi}{\sqrt{y}}$ d) $\frac{x}{y}$

11) لاندې مختلط عددونه جمع کړئ.

$(3+4i)+(2+5i)$ $(a+bi)+(c+di)$

$(1+i)\ +(1-i)$ $(2+3i)+(2-3i)$

12) لاندې مختلط عددونه تفریق کړئ.

$(4+3i)-(4+4i)$ $(3-2i)-(3+2i)$

$(4+4i)-(4+3i)$ $(1+i)-(1-i)$

13) $(2a+ib)-(2a-ib)$ مساوي دي په:

a) $-ib$ b) $-2ib$ c) $2ib$ d) $4a$

14) $(2-3i)\,(2+3i)$ د ضرب حاصل مساوي دی په:

a) -13 b) $13i$ c) 13 d) $9i$

15) لاندې مختلط عددونه د $a+bi$ په شکل ولیکئ.

$4(2+5i)-(3-4i)$ $(4-3i)(2+i)$

$i(3-2i)^2$ i^{51}

16) که $z_1=2-4i$ او $z_2=1-i$ وي، وښیاست چې:

$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

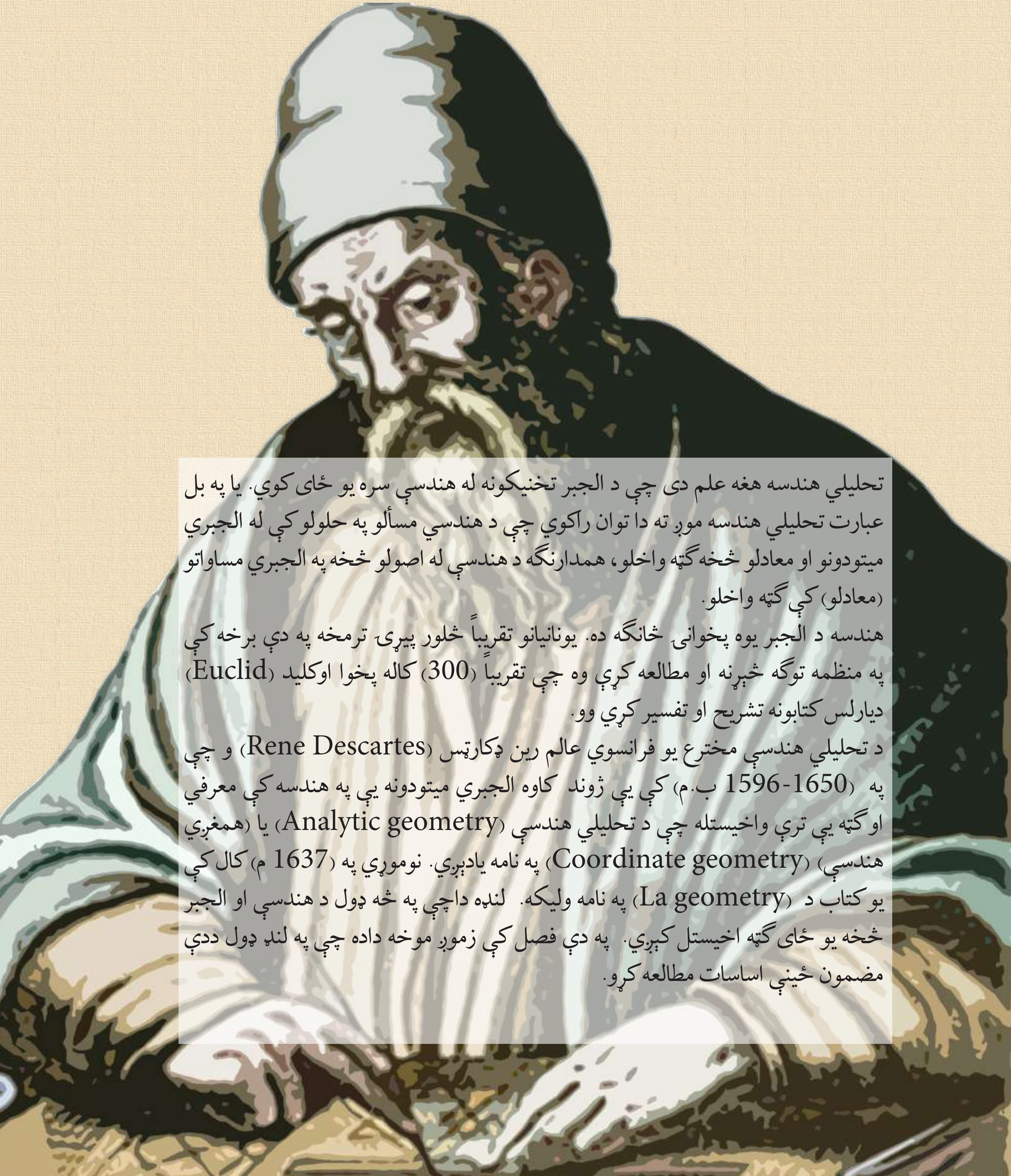
17) د لاندې مختلطو عددونو جمعي او ضربي معکوس پیدا کړئ.

$3x-\frac{1}{2}yi$ $2a-bi$ $2+5i$ $-7+3i$ $-6+2i$ $3-i$ $\sqrt{2}+i$

18) د $5x^2+2x+1=0$ معادله حل کړئ.

اووم څپرکی

تحلیلي هندسه

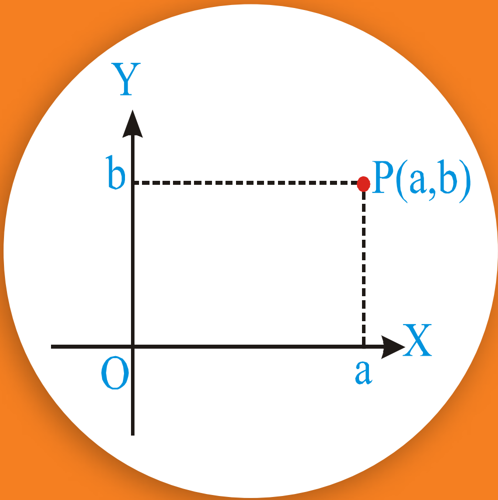


تحليلي هندسه هغه علم دی چې د الجبر تخنيکونه له هندسې سره يو ځای کوي. يا په بل عبارت تحليلي هندسه موږ ته دا توان راکوي چې د هندسي مسألو په حلولو کې له الجبري ميتودونو او معادلو څخه ګټه واخلو، همدارنګه د هندسې له اصولو څخه په الجبري مساواتو (معادلو) کې ګټه واخلو.

هندسه د الجبر يوه پخوانۍ څانګه ده. يونانيانو تقريباً څلور پيړۍ ترمخه په دې برخه کې په منظمه توګه څېړنه او مطالعه کړې وه چې تقريباً (300) کاله پخوا اوکليد (Euclid) ديارلس کتابونه تشريح او تفسير کړي وو.

د تحليلي هندسې مخترع يو فرانسوي عالم رين ډکارټس (Rene Descartes) و چې په (1596-1650 ب.م) کې يې ژوند کاوه الجبري ميتودونه يې په هندسه کې معرفي او ګټه يې ترې واخيستله چې د تحليلي هندسې (Analytic geometry) يا (همغږې هندسې) (Coordinate geometry) په نامه يادېږي. نوموړي په (1637 م) کال کې يو کتاب د (La geometry) په نامه وليکه. لنډه داچې په څه ډول د هندسې او الجبر څخه يو ځای ګټه اخيستل کېږي. په دې فصل کې زموږ موخه داده چې په لنډ ډول ددې مضمون ځينې اساسات مطالعه کړو.

د وضعیه کمیاتو سیستم یا کوارډنټ سیستم (Coordinate system)



آیا د $(0,-1)$ ، $(2,2)$ ، $(-4,7)$ ، $(2,0)$ او د $(0,-2)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې ټاکلای شئ؟

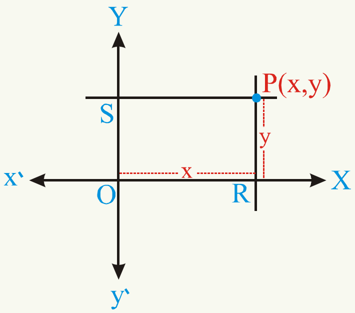
فعالیت

د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د XX' او YY' یو پر بل دوه عمود خطونه رسم کړئ. ددې دوو خطونو د تقاطع ټکي (نقطې) ته (O) وایې چې د O نقطې ته د وضعیه کمیاتو د محورونو مبدا (Origin) وایي.

دوه یو پر بل عمود خطونه د کوارډنټ د محورونو (Coordinate axises) په نامه یادېږي. چې د XOX' افقي خط د X محور او د YOY' عمودي خط د Y له محور څخه عبارت دی. ښکاره ده ټول عددونه چې د X پر محور د مبدا ښي خواته واقع دي، مثبت او که د مبدا کیڼې خواته واقع وي، منفي دي. همدرانګه هغه عددونه چې د Y پر محور له مبدا پورته واقع دي، مثبت او که له مبدا لاندې واقع دي، منفي عددونه دي.

فرضوو چې که p په مستوي کې یوه نقطه وي، کولای شو چې د p نقطه د یوې مرتبې جوړې $(OrderPair)$ په واسطه وښایو. په دې ډول چې د p له نقطې څخه د X او Y له محورونو سره موازي مستقیم خطونه رسموو. چې دا مستقیم خطونه د Y محور د S په نقطه کې او د X محور د R په نقطه کې قطع کوي. چې د $\overline{OR}$ مستقیمه فاصله $\overline{OR}=x$ او $\overline{OS}=y$ ده. په نتیجه کې د p د نقطې موقعیت د (x,y) د مرتبې جوړې په واسطه د وضعیه کمیاتو په سیستم کې ټاکل کېږي.

په مستوي کې هره مرتبه جوړه د یوې نقطې په واسطه او د مستوي هره نقطه د (x,y) د حقیقي عددونو د مرتبې جوړې په واسطه ښودل کېږي. چې x او y د X او Y له محورونو څخه د p د

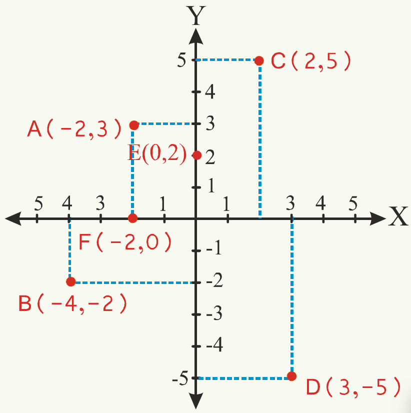


نقطې مستقیمې فاصلې دي چې دې سیستم ته کارتیزني یا کوارډنټ سیستم (Coordinate System) وايي.

د مرتبې جوړې لومړنی مرکبې ته د x مختصه او دویمې ته د y مختصه (Y-Coordinate) وايي. د کوارډنټ محورونه مستوي په څلورو ناحیو (ربعو) (quadrants) وېشي. په دې ډول چې په لومړنی ناحیه (ربع) کې، $x > 0$ ، $y > 0$ په دویمه ربع کې $x < 0$ ، $y > 0$ په دریمه ربع کې $x < 0$ ، $y < 0$ او په څلورمه ربع کې $x > 0$ او $y < 0$ دي.

لومړی مثال: د $A(-2,3)$ ، $B(-4,-2)$ ، $C(2,5)$ ، $D(3,-5)$ ، $E(0,2)$ او $F(-2,0)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.

حل:



فعالیت

- وښیاست کومې نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د y مختصې یې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي، د x مختصې یې صفر دي.
- ووایاست چې د $(2,3)$، $(-2,3)$، $(2,-3)$، $(-2,-3)$، $(0,4)$ او $(4,0)$ نقطې په کومو ربعو کې واقع دي.

د دوو نقطو ترمنځ فاصله (Distance between two points):

آیا کولای شئ چې و وایاست، د $A(4,8)$ او $B(1,2)$ د نقطو تر منځ فاصله څو واحده ده؟

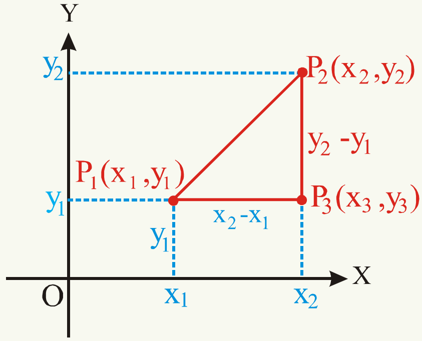
که $P_1\ (x_1\,,y_1\,)$ او $P_2\ (x_2\,,y_2)$ په مستوي کې دوې نقطې وي. موږ کولای شو چې د P_1 او

P_2 ترمنځ فاصله یا $d=|P_1P_2|$ د دوو نقطو ترمنځ فاصله د $P_1\overset{\Delta}{P_3}P_2$ د قایم الزاویه مثلث له مخې د فیثاغورث د قضیې په اساس پیداکړو، لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.

$$(\overline{P_1P_2})^2=(\overline{P_1P_3})^2+(\overline{P_2P_3})^2$$

$$d=|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

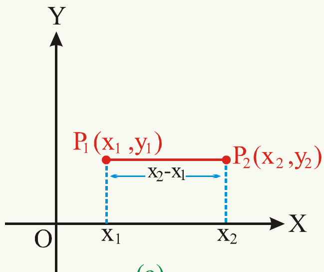


پام مو وي چې که د $P_1\ (x_1,y_1)$ او $P_2\ (x_2,y_2)$ نقطې پر افقي خط باندې واقع وي، په دې حالت کې $y_1=y_2$ کېږي، لکه: څرنګه چې د (a) په شکل کې لیدل کېږي.

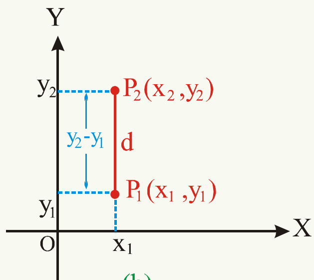
$$d=|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+0}=|x_2-x_1|$$

او که د P_1 او P_2 نقطې پر عمودي خط باندې واقع وي، په دې حالت کې $x_1=x_2$ دی، لکه: چې د (b) په شکل کې ښودل شوي دي.

$$d=|P_1P_2|=\sqrt{0+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(y_2-y_1)^2}=|y_2-y_1|$$



(a)



(b)

دویم مثال: د $P_1\ (3,-2)$ او $P_2\ (-1,-5)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

حل:

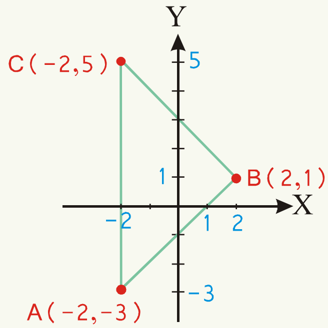
$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-1-3)^2+[-5-(-2)]^2} = \sqrt{(-4)^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

فعالیت

د $P_1\ (8,0)$ او $P_2\ (2,0)$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

دریم مثال: د فاصلې د فورمول په مرسته وښیاست چې $A(-2,-3)$ ، $B(2,1)$ او $C(-2,5)$ د یو قایم الزاویه مثلث راًسونه دي.

حل:



$$|AB| = \sqrt{[2-(-2)]^2+[1-(-3)]^2} = \sqrt{32}$$
$$|BC| = \sqrt{(-2-2)^2+(5-1)^2} = \sqrt{32}$$
$$|CA| = \sqrt{[-2-(-2)]^2+[5-(-3)]^2} = \sqrt{64}$$
$$|AB|^2+|BC|^2 = 32+32 = 64$$
$$|CA|^2 = 64$$

خرنګه چې: $|CA|^2 = |AB|^2+|BC|^2$ دی نو د $A\overset{\Delta}{B}C$ مثلث یو قایمه زاویه مثلث دی.

فعالیت

وښیاست چې $A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ او $C(-1,5)$ نقطې د قایمه زاویه مثلث راسونه دي.

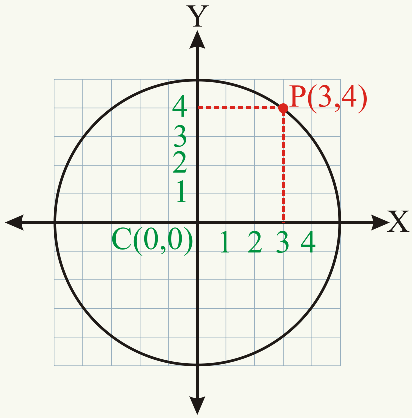
څلورم مثال: که $C(0,0)$ د دایرې مرکز او د $P(3,4)$ نقطه د دایرې د محیط یوه نقطه وی،

ددې دایرې د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

حل:

$$\overline{PC} = R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2}$$

$$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$



د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هغه نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د Y مختصې یې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي د X مختصې یې صفر دي.

د $P(x_1, y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ د دوو نقطو تر منځ فاصله د $d = |PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

پوښتني

1- په لاندې راکړل شوو نقطوکې د کومې نقطې فاصله د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه 15 واحده ده؟

$a:(\sqrt{176},7)$

$b:(10,-10)$

$C:(1,15)$

$d:(\frac{15}{2},\frac{15}{2})$

2- وښیاست چې د $A(0,2)$ ، $B(\sqrt{3},1)$ او $C(0,-2)$ نقطې د یو قایمه زاویه مثلث راسونه دي.

3 - د $(0,5)$ او $(0,-3)$ نقطو تر منځ فاصله پیدا کړئ.

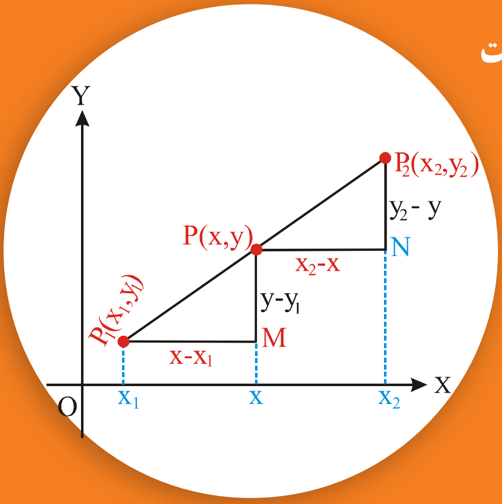
4 - د $A(-\frac{1}{2},3)$ او $B(-1,\frac{-3}{4})$ نقطو تر منځ فاصله پیدا کړئ.

5 - د $(7,11)$ او $(1,3)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

6 - د $(3,6)$ او $(1,2)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

7 - د $(3,7)$ او $(12,19)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

د هغې نقطې د وضعیه کمیاتو پیدا کول چې یو قطعه خط په یوه نسبت باندې وېشي:



آیا کولای شئ د هغه مستقیم خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د $A(3,1)$ او $B(-2,4)$ له نقطو څخه تېرېږي؟
که د p د نقطې وضعیه کمیات (x,y) وي

چې د $\overline{P_1P_2}$ مستقیم خط د r په نسبت وېشي یا $\frac{P_1P}{PP_2}=r$ وي. د $P_1\overset{\Delta}{M}P$ او $P\overset{\Delta}{N}P_2$ د مثلثونو له مشابهت څخه لرو چې:

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{PM}{P_2N}=\frac{y-y_1}{y_2-y}=r$$
$$y-y_1=ry_2-ry$$
$$y+ry=ry_2+y_1$$
$$(1+r)y=ry_2+y_1$$
$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$$

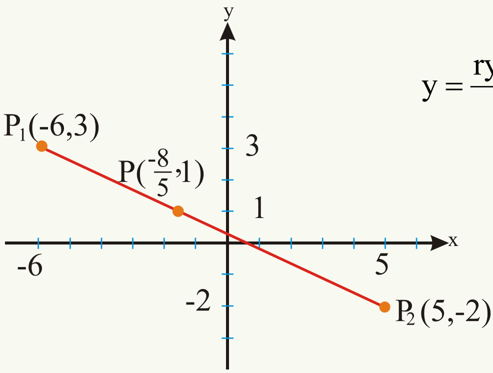
$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{P_1M}{PN}=\frac{x-x_1}{x_2-x}=r$$
$$x-x_1=rx_2-rx$$
$$x+rx=rx_2+x_1$$
$$(1+r)x=rx_2+x_1$$
$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}$$

لومړی مثال: د P نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، که هغه مستقیم خط چې د $P_1(-6,3)$ او $P_2(5,-2)$ له نقطو څخه تېرېږي د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي یا $\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{2}{3}$ وي.

حل

$$x_1=-6 \qquad x_2=5 \qquad r=\frac{2}{3}$$

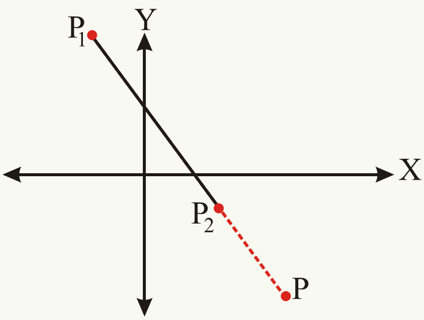
$$x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 5-6}{1+\frac{2}{3}}=-\frac{8}{5}$$



$$y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}(-2)+3}{1+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{-4}{3}+3}{1+\frac{2}{3}}=1$$

نو د p نقطي وضعيه کميات $P(\frac{-8}{5},1)$ دي چې د $\overline{P_1P_2}$ خط د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي.

متوجه بايد اوسو چې که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط داخلاً د r په نسبت و وېشي، $r>0$ او که خارجاً يې و وېشي، نو $r<0$ دی.



د مثال په ډول په شکل کې ليدل کېږي چې که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه داخلاً د r په نسبت ووېشي يا په بل عبارت که P_1P او PP_2 همجهت وي، $r>0$ او که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط خارجاً د r په نسبت ووېشي يا داچې P_1P او PP_2 مختلف الجهت وي، $r<0$ دی، نو $\frac{P_1P}{PP_2}=-r$ لکه: چې په پورتني شکل کې ليدل کېږي.

دويم مثال: د p د نقطي وضعيه کميات پيدا کړئ، که هغه مستقيم خط چې د $P_1(-8,4)$ او $P_2(2,-1)$ له نقطو څخه تېرېږي.

a: داخلاً يې د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي.   b: خارجاً يې د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي.

د a حل:

$$r=\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 2-8}{1+\frac{2}{3}}=\frac{-20}{5}=-4\ ,\ \ y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}(-1)+4}{1+\frac{2}{3}}=\frac{10}{5}=2$$

نو د p د نقطې وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط داخلاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي له $(-4,2)$ څخه عبارت دي

د b حل: څرنګه چې د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي، نو:

$$r=-\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{(\frac{-2}{3})\cdot 2-8}{1-\frac{2}{3}}=-28 \quad , \quad y=\frac{(\frac{-2}{3})(-1)+4}{1-\frac{2}{3}}=14$$

د p د نقطې وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي له $(-28,14)$ څخه عبارت دي.

فعالیت

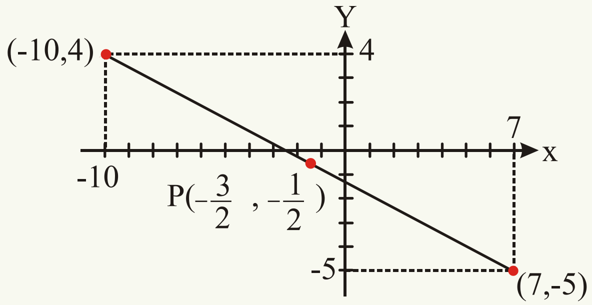
د p د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، په داسې حال کې هغه قطعه خط چې د $A(4,6)$ او $B(-2,3)$ له نقطو څخه تېرېږي، داخلاً یې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي.

که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ د مستقیم خط د تنصیف نقطه وي، په دې حالت کې $r=1$ دی او د p نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له: $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ او $y=\frac{y_1+y_2}{2}$

دریم مثال: د هغه قطعه خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د $(-10,4)$ او $(7,-5)$ له نقطو څخه تېرېږي.

حل:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-10+7}{2}=-\frac{3}{2} \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{4-5}{2}=-\frac{1}{2}$$



د p د نقطې وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط د r په نسبت وېشي.

د $y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}$, $x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}$ او د $P_1 P_2$ قطعــه خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات عبــارت دي له: $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ که د p نقطه د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط داخلاً د r په نسبت و وېشي، نو r مثبت او که خارجاً يې و وېشي، نو r منفي دی.

پوښتنې

1 - د $\overline{AB}$ مستقیم خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات $(2,-1)$ دي، که $A(-1,-3)$ وي، د B د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

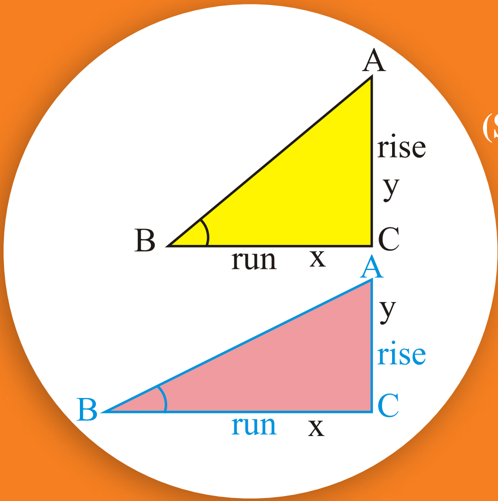
2 - د هغــه قطعــه خط د تنصیف نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د $A(3,1)$ او $B(-2,-4)$ له نقطو څخه تیرېږي.

3 - د هغې نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ په داسې حال کې هغه قطعه خط چې د $A(4,6)$ او $B(-2,3)$ له نقطو څخه تیرېږي

a: داخلاً يې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي. b: خارجاً يې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي.

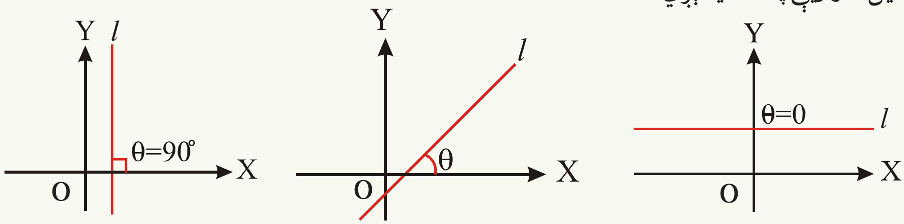
د یو مستقیم خط میل

(Slope of a straight Line)



کـولای شـئ چـې ووایـئ دکومـې مایلې سطحې میل زیات دی؟

د □ زاویه چې د l مســتقیم خط یې د X د محور له مثبت جهت ســره جوړوي، د مستقیم خط د میل د زاویې په نامه یادېږي.



لکه څرنگه چې په شکل کې لیدل کېږي که د l خط د X له محور سره موازي وي 0 =□ او که د Y له محور سره موازي وي، نو $90°$ =□ ده.

څه وخت چې موږ پر مایله ســطحه (inclined plane) پورته خواته حرکت کوو، په یو وخت کې افقي فاصله (run) او عمودي فاصله (rise) طې کوو. که د AB د مســتقیم خط میل په m و ښایو.

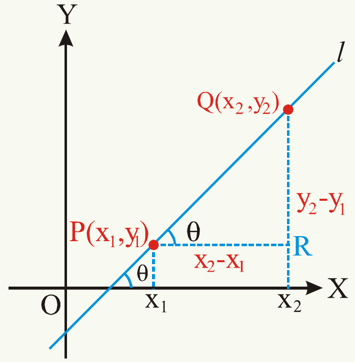
$$m = \frac{rise}{run} = \frac{y}{x} = \tan\theta$$

د مستقیم خط میل د هغه زاویې له tan څخه عبارت دی چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي، که $0 < \theta < 90°$ وي، نو د مستقیم خط میل مثبت او که $90° < \theta < 180°$ وي میل منفي دی او که $\theta = 0$ وي $\tan 0° = 0$ دی، نو میل یې صفر او که $\theta = 90°$ وي، نو په دې حالت کې د مستقیم خط میل تعریف شوی نه دی، ځکه چې $\tan\ 90°$ تعریف شوی نه دی.

فعالیت

د X او Y د محورونو د میل په برخه کې څه فکر کوئ؟

د هغه مستقیم خط میل چې عمود نه وي او د $P(x_1 y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تیرېږي. $m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ دی، څکه لکه څرنگه چې په شکل کې لیدل کېږي.



$$\hat{RPQ} = \hat{\theta}$$

$$\overline{PR} = x_2 - x_1$$

$$\overline{QR} = y_2 - y_1$$

$$m = \tan\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

که د A، B، او C دري نقطې داسې ولرو چې د $\overline{AB}$ د مستقیم خط میل د $\overline{BC}$ د مستقیم خط له میل سره مساوي وي، نو د A، B، او C نقطې په یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

لومړی مثال: د هغه مستقیم خط میل پیداکړئ چې د $P_1\ (2,4)$ او $P_2\ (6,10)$ له نقطو څخه تیرېږي.

حل:

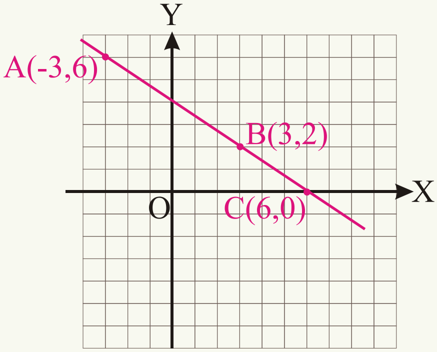
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-4}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

یا:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4-10}{2-6} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: و بنیاست چې د $A(-3,6)$، $B(3,2)$ او $C(6,0)$ دري نقطې پر یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

$$\overline{AB} \text{ د مستقیم خط میل} = \frac{2-6}{3-(-3)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$



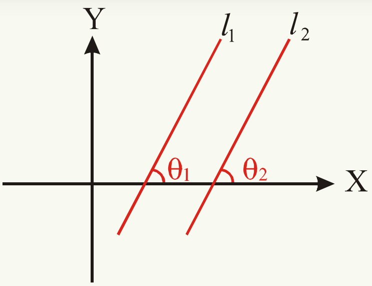
$\overline{BC}$ د مستقیم خط میل د $= \frac{0-2}{6-3} = -\frac{2}{3}$

څرنګه چې د $\overline{AB}$ او $\overline{BC}$ مستقیمو خطونو میلونه سره مساوي دي.نو د A، B او C نقطې په یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

نتیجه: د یوه مستقیم خط میل د مستقیم خط په ټولو نقطو کې سره مساوي دي.

فعالیت

- د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $(-2,4)$ او $(5,1)$ له نقطو څخه تیریږي.
- د مستقیم خط د میل په مرسته وښیاست چې د $(4,-5)$ ، $(7,5)$ او $(10,15)$ نقطې پر یوه مستقیم خط پرتې دي.



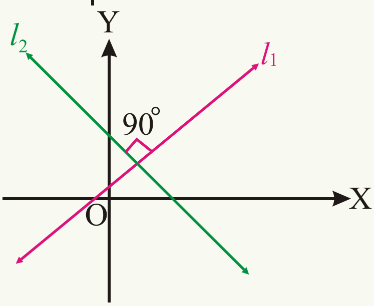
که د l_1 او l_2 دوه مستقیم خطونه وي او میلونه یې په ترتیب سره m_1 او m_2 وي، نو:

1- که l_1 د l_2 سره موازي وي $m_1 = m_2$ دی.

ځکه چې د شکل مطابق $\theta_1 = \theta_2$ دی

$\tan\theta_1 = \tan\theta_2$

$m_1 = m_2$



2- که l_1 او l_2 یو پر بل عمود وي، نو:

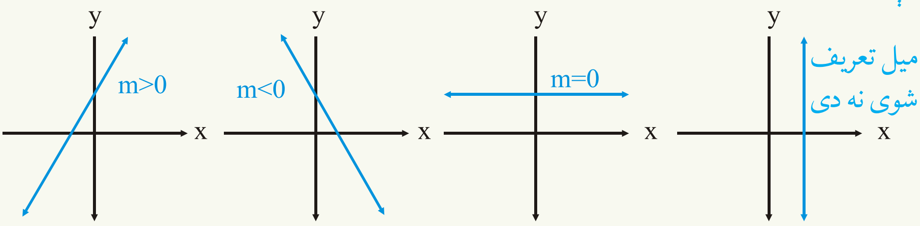
$m_1 = -\frac{1}{m_2}$ یا $m_1 m_2 + 1 = 0$ یا

$m_1 \cdot m_2 = -1$ دی.

د یو مستقیم خط میل چې د $P_1(x_1, y_1)$ او د $P_2(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تیریږي، د

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ له فورمول څخه په لاس راځي د X د محور او د هغو مستقیمو

خطونو میل چې د X له محور سره موازي وي صفر او د Y د محور او د هغو مستقیمو خطونو میل چې د Y له محور سره موازي وي تعریف شوی نه دی. که د یوه مستقیم خط د میل زاویه حاده وي، میل یې مثبت او که منفرجه وي، میل یې منفي دی او که د مستقیم خط د میل زاویه صفر وي، میل یې صفر دی.



پوښتنې

1 - د هغه مستقیم خط میل پیداکړئ چې د $(3,-2)$ او $(2,7)$ له نقطو څخه تېرېږي.

2 -که $A(8,6)$ ، $B(-4,2)$ او $C(-2,-6)$ د یو مثلث رأسونه وي، د مثلث د هرې ضلعې میل پیداکړئ.

3 - د مستقیم خط د میل په مرسته و ښیاست چې د $(a,2b)$ ، $(c,a+b)$ او $(2c-a,2a)$ نقطې پر یو مستقیم خط باندې واقع دي.

4 - د $\overline{AB}$ مستقیم خط چې د $A(1,-2)$ او $B(2,4)$ له نقطو او د $\overline{CD}$ مستقیم خط چې د $C(4,1)$ او $D(-8,2)$ له نقطو څخه تېرېږي، دا دواړه خطونه سره:

a: موازي دي b: عمود دي c: هېڅ یو

5 - د $y=3$ مستقیم خط او د $x=3$ مستقیم خط یو له بله سره څه اړیکه لري؟

a - موازي دي b - عمود دي c - هېڅ یو

6 - د $x=-1$ او $x=3$ خطونه سره: a - موازي دي b - عمود دي c - هېڅ یو

7 - د $y=-\sqrt{3}$ مستقیم خط میل مساوي دی په:

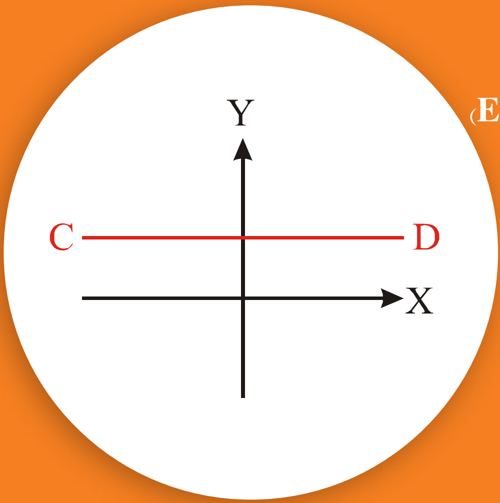
a - 1 b- صفر c- -1 d- تعریف شوی نه دی

8 - د $x=0{,}03$ مستقیم خط میل مساوي دی په:

a - 1 b- صفر c- -1 d- تعریف شوی نه دی.

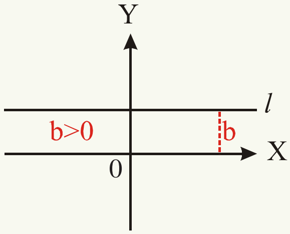
د یو مستقیم خط معادله

(Equation of a straight Line)



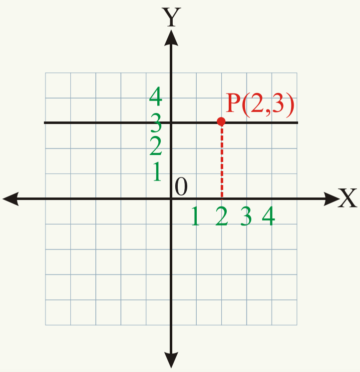
آیا کولای شئ د $\overline{CD}$ د مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د X له محور سره موازي وي.

1–د هغه مستقیم خط معادله چې د X له محور سره موازي وي.



ټولې نقطې چې د l پر مستقیم خط پرتې وي، د X له محور څخه مساوي فاصلې لري یا په بل عبارت د ټولو هغو نقطو د y مختصې چې د X له محور سره پر موازي خط واقع دي سره مساوي دي. که د X له محور څخه د l د خط فاصلې ته (b) ووایو د l د مستقیم خط معادله $y = b$ ده.

که $b > 0$ وي، نو د l خط د X له محور څخه پورته او که $b < 0$ وي، نو د l خط د X له محور لاندې او که $b = 0$ وي، نو د l خط د X پر محور پروت دی.



لومړی مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د (2,3) له نقطې څخه تیریږي او د X له محور سره موازي وي.

حل: $y = 3$ ددې خط معادله ده

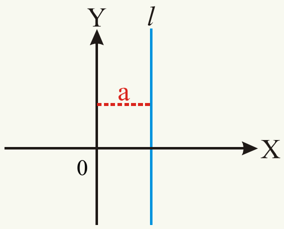
فعالیت

د X د محور معادله پیدا کړئ.

2 - د هغه مستقیم خط معادله چې د Y له محور سره موازي وي: تولې نقطې چې

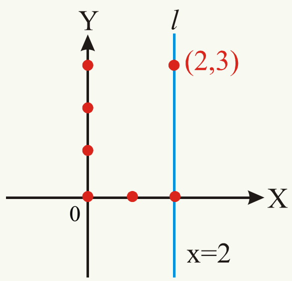
د l پر خط چې د Y له محور سره موازي دی، پرتې وي، د Y له محور څخه مساوي فاصلې لري که د Y له محور څخه د l د مستقیم خط فاصلې ته a و وایو چې a ددې نقطو لومړنی مختصه ده، نو د l د خط معادله $x = a$ ده.

که $a > 0$ وي د l خط د Y د محور ښي خواته او که $a < 0$ وي د l خط د Y د محور کیڼې خواته او که $a = 0$ وي، نو د l خط د Y پر محور منطبق دی.



دویم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د (2,3) له نقطې څخه تېر شي او د Y له محور سره موازي وي.

حل: $x = 2$ ددې خط معادله ده.



فعالیت

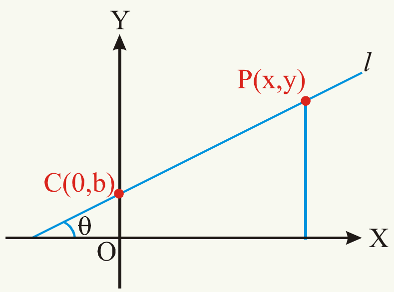
د Y د محور معادله ولیکئ.

3. د هغه مستقیم خط معادله چې میل او د Y له محور سره یې د تقاطع نقطه معلومه وي یا د مستقیم خط معیاري معادله:

که $P(x,y)$ د l مستقیم خط یوه نقطه وي او $C(0,b)$ د Y له محور سره د مستقیم خط د تقاطع نقطه وي، نو د l د مستقیم خط میل عبارت دی له:

$$m = \frac{y-b}{x-0} = \frac{y-b}{x}$$

$$y - b = mx \quad \text{یا} \quad y = mx + b$$



که $b=0$ وي، د مستقیم خط معادله $y=mx$ ده چې په دې حالت کې مستقیم خط د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تېرېږي.

درېیم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې:

a- میل یې 2 او د Y محور په 5 کې قطع کړي.

b- د Y محور په $\frac{4}{3}$ کې قطع کړي او پر هغه خط عمود وي چې میل یې -6 دی.

حل:

a: $m=2$ او $b=5$

$$y=mx+b \Rightarrow y=2x+5$$

b: ددې خط میل $m_2=-\frac{1}{m_1}=-\frac{1}{-6}=\frac{1}{6}$

$b=\frac{4}{3}$ او $m=\frac{1}{6}$ دی؛ نو:

$$y=mx+b \Rightarrow y=\frac{1}{6}x+\frac{4}{3}$$

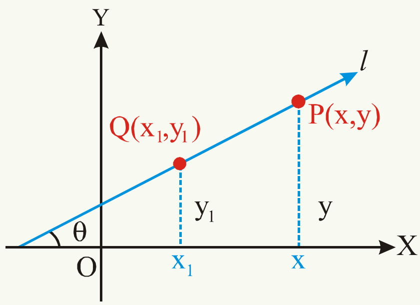
دا معادله کولای شو، د $6y=x+8$، $6y-x=8$ او یا $x-6y+8=0$ په شکل ولیکو.

4 - د هغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي:

د l د مستقیم خط معادله چې میل یې m او د $Q(x_1,y_1)$ له نقطې څخه تېرېږي.

که $p(x,y)$ د l د مســتقیم خط یوه اختیاري نقطه وي. څرنګه چې د $Q(x_1,y_1)$ او $P(x,y)$ نقطې په یوه مستقیم خط واقع دي، نو د l د مستقیم خط میل مساوي دی په:

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow y-y_1=m(x-x_1)$$



څلورم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې میل یې (-2) او د $(5,1)$ له نقطې څخه تېرېږي.

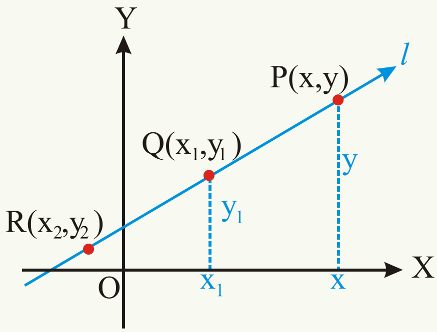
حل:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 1 = -2(x - 5)$$
$$y = -2x + 11$$

یا $2x + y - 11 = 0$

5: **د هغه مستقیم خط معادله چې دوې نقطې یې معلومې وي**:

د l د خط میل چې عمود نه وي، د $Q(x_1, y_1)$ او $R(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي او $P(x, y)$ ددې خط یوه کیفي نقطه وي، څرنگه چې د مستقیم خط میل په هره نقطه کې سره مساوي دي، نو لرو چې:



$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

یا $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

پنځم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(-2,1)$ او $(6,-4)$ له نقطو څخه تېرېږي.

حل:

$$y_1 = 1 \quad , \quad x_1 = -2$$
$$y_2 = -4 \quad , \quad x_2 = 6$$

$$y - 1 = \frac{-4 - 1}{6 - (-2)}[x - (-2)]$$

$y - 1 = \frac{-5}{8}(x + 2)$ یا $5x + 8y + 2 = 0$

6: **د هغه مستقیم خط معادله چې له محورونو سره یې تقاطع معلومه وي**:

که $P(x, y)$ د l د مستقیم خط یوه کیفي نقطه وي او د l مستقیم خط د X محور په a کې او د Y محور په b کې قطع کړي یا د X محور د $A(a,0)$ او د Y محور د $B(0,b)$ په نقطه کې قطع کوي چې د B ، A او p نقطې د l پر مستقیم خط واقع دي.

د هغه مستقیم خط له معادلې څخه چې دوې نقطې یې معلومې وي لرو چې:

$x_1 = a \ , \ y_1 = 0 \quad x_2 = 0 \ , y_2 = b$

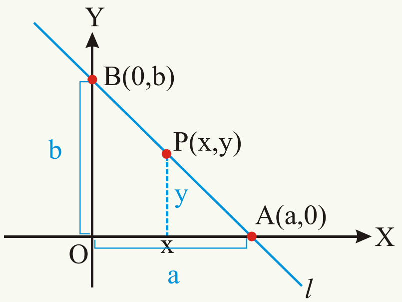
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \ , \ y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a) \Rightarrow -ay = b(x - a)$$

$$-ay = bx - ab$$

$$bx + ay = ab$$

دواړه خواوې پر ab ویشو

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



شپږم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د x محور په $(2,0)$ او د Y محور په $(0,-4)$ کې قطع کوي.

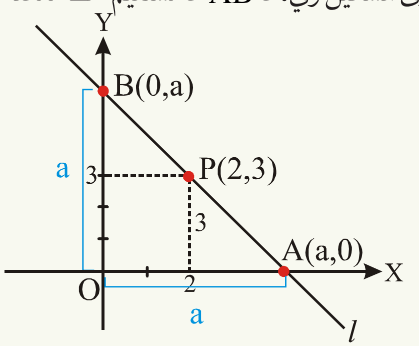
حل: $a = 2$ او $b = -4$ ده.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$$

$2x - y - 4 = 0$ یا

اووم مثال: په شکل کې چې د $O\overset{\Delta}{A}B$ مثلث متساوی الساقین وي، د $\overline{AB}$ د مستقیم خط معادله په داسې حالت کې پیدا کړئ چې ددې مثلث د $\overline{AB}$ ضلع د $P(2,3)$ له نقطې څخه تیریږي.



حل: د $\overline{AB}$ د مستقیم خط میل مساوي دی په:

$$\overline{AB} = \frac{a - 0}{0 - a} = -1$$ د مستقیم خط میل

نو اوس د هغه مستقیم خط معادله چې میل یې (-1) او د $P(2,3)$ له نقطې څخه تیریږي عبارت ده له:

$y-3=-1(x-2)$ یا $x+y-5=0$

د هغه مستقیم خط معادله چې میل او د Y له محور سره یې تقاطع معلومه وي عبارت ده له:
$y=mx+b$ د هغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي عبارت ده له:
$y-y_1=m(x-x_1)$، د هغه مستقیم خط معادله چې دوې نقطې یې معلومې وي عبارت ده له:
$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ اود هغه مستقیم خط معادله چې له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ ده.

پوښتنې

1- د لاندې مستقیمو خطونو معادلې پیداکړئ چې:

a: د هغه افقي خط معادله پیداکړئ چې له $(7,-9)$ نقطې څخه تیریږي.

b: د هغه مستقیم خط معادله چې د X پر محور عمود او له $(-5,3)$ نقطې څخه تیریږي.

2- د لاندې مستقیمو خطونو معادلې پیداکړئ چې:

a: میل یې 7 او د $(-6,5)$ له نقطې څخه تېر شي.

b: میل یې صفر او د $(8,-3)$ له نقطې څخه تیریږي.

c: د $(-8,5)$ له نقطې څخه تیریږي او میل یې تعریف شوی نه وي.

d: د $(-5,-3)$ او $(9,-1)$ له نقطو څخه تیریږي.

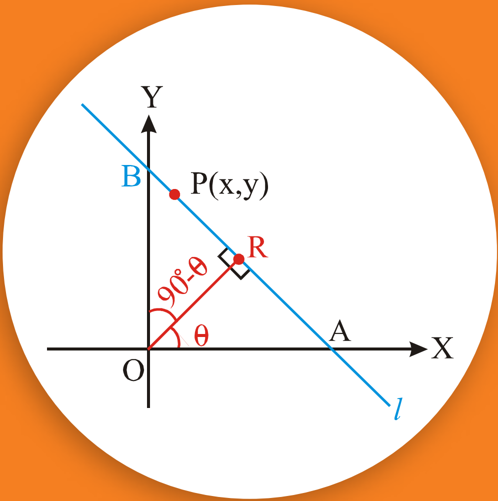
e: میل یې -4 او د Y محور په -9 کې قطع کړي.

3- د هغه مثلث د ضلعو معادلې پیداکړئ چې راسونه یې $A(-3,2)$، $B(5,4)$ او $C(3,-8)$ وي.

4- د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د $(-4,-6)$ له نقطې څخه تیریږي او پر هغه خط عمود وي چې میل یې $\dfrac{-3}{2}$ وي.

5- د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د $(11,-5)$ له نقطې څخه تیریږي او له هغه خط سره موازي وي چې میل یې -24 وي.

7 - د مستقیم خط نورمال معادله



آیا ویلای شــئ د یوه مســتقیم خط نورمال خط

کوم خط ته وایي؟

د l د مســتقیم خط معادله که p د هغه عمود خط اوږدوالی وي چې د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د l پر خط عمود وي او θ د عمود خط د میل زاویه وي.

عبارت ده له: $x\cos\theta + y\sin\theta = P$ یا $x\cos\theta + y\sin\theta - P = 0$

د l مســتقیم خـط د X محـور د A پـه نقطه کې او د Y محـور د B په نقطه کې قطع کوي، که $P(x,y)$ د $\overline{AB}$ د مســتقیم خط یوه کیفي نقطه وي او د $\overline{OR}$ خط د l پر خط عمود وي، نو: $\left|\overline{OR}\right| = P$ دی چې د $\overline{OR}$ خط ته د l د خط نورمال خط وایي او P د نورمال اوږدوالی دی.

د $\overset{\Delta}{ORA}$ او $\overset{\Delta}{ORB}$ په قایمه زاویه مثلثونو کې لرو چې:

$$\cos\theta = \frac{P}{OA} \text{ یا } OA = \frac{P}{\cos\theta}$$

$$\cos(90°-\theta) = \frac{P}{OB} \text{ یا } OB = \frac{P}{\cos(90°-\theta)} = \frac{P}{\sin\theta}$$

له مثلثاتو پوهیږو: $\cos(90°-\theta) = \sin\theta$

څرنګه چې د $\overline{AB}$ مســتقیم خط د X محور په $(OA,0)$ او د Y محور په $(0,OB)$ کې قطع کوي، نو د $\overline{AB}$ د مستقیم خط معادله عبارت ده له:

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1$$

$$\frac{x}{\frac{P}{\cos\theta}}+\frac{y}{\frac{P}{\sin\theta}}=1$$

یا:

$$x\cos\theta + y\sin\theta = P$$

چې $x\cos\theta + y\sin\theta = P$ یا $x\cos\theta + y\sin\theta - P = 0$ د l د مستقیم خط نورمال معادله ده.

لومړی مثال: که د هغه عمود خط اوږدوالی چې د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د l پرخط عمود وي 5 واحده وي او ددې عمود خط د میل زاویه $120°$ وي، د l د مستقیم خط میل، نورمال معادله یې او د Y له محور سره یې د تقاطع نقطه پیدا کړئ.

حل: $\theta = 120°$ او $P = 5$ دی.

$$x\cos 120° + y\sin 120° = 5$$

$$-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=5 \qquad (\cos 120° = -\frac{1}{2} \quad , \quad \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$x-\sqrt{3}y+10=0$$

د l خط د میل د پیداکولو لپاره د ا معادله د $y = mx + b$ په شکل لیکو:

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{10}{\sqrt{3}}$$

نو د l خط میل $m=\frac{1}{\sqrt{3}}$ او د Yمحور د $(0,\frac{10}{\sqrt{3}})$ په نقطه کې قطع کوي.

فعالیت

د هغه مستقیم خط نورمال معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 10 واحده او نورمال یې د X د محور له مثبت جهت سره د $30°$ زاویه جوړوي.

8- د مستقیم خط عمومي معادله:(General equation of a straight Line)

د $ax + by + c = 0$ معادله د x او y دوه متحوله لري a، b، او c ثابت عددونه دي چې a او b دواړه په یو وخت کې صفر نه وي،د مستقیم خط دعمومي معادلې په نامه یادېږي.

1) که $a \neq 0$ او $b = 0$ وي، نو $x = -\frac{c}{a}$ یا $ax + c = 0$ دا د هغه مستقیم خط معادله ده چې د Y له محور سره موازي وي ددې خط مستقیمه فاصله د Y له محور څخه $-\frac{c}{a}$ ده.

2) که $a = 0$ او $b \neq 0$ وي، نو معادله د $by + c = 0$ شکل نیسي یا $y = -\frac{c}{b}$ چې دا د هغه مستقیم خط معادله ده چې د X له محور سره موازي دی. د X له محور څخه ددې خط مستقیمه فاصله $\frac{-c}{b}$ ده.

3) که $a \neq 0$ او $b \neq 0$ وي، نو:

$$by = -ax - c \quad \text{یا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + b$$

دا د هغه مستقیم خط معادله ده چې میل یې $m = \frac{-a}{b}$ دی او د y محور په $\frac{-c}{b}$ کې قطع کوي.

1- د مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول په معیاري شکل:

د $ax + by + c = 0$ عمومي معادله د معیاري معادلې په شکل عبارت ده له:

$$by = -ax - c \quad \text{یا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + b$$

چې ددې خط میل $m = \frac{-a}{b}$ او د Y محور په $\frac{-c}{b}$ کې قطع کوي.

دویم مثال: د $5x - 12y + 39 = 0$ مستقیم خط عمومي معادله په معیاري شکل واړوئ.

حل:

$$12y = 5x + 39 \quad \text{یا} \quad y = \frac{5}{12}x + \frac{39}{12}$$

چې میل یې $m = \frac{5}{12}$ او د Y محور په $\frac{39}{12}$ کې قطع کوی.

2- د مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي.

د $ax+by+c=0$ په معادله کې د مستقیم خط میل $\frac{-a}{b}$ او یوه نقطه یې $(\frac{-c}{a},0)$ ده، نو:

$$m=\tan\theta=\frac{-a}{b} \qquad y=\frac{-a}{b}(x+\frac{c}{a})$$

دریم مثال: د $5x-12y+39=0$ د مستقیم خط عمومي معادله د هغه خط د معادلې په شکل تبدیله کړئ چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي.

حل: د $5x-12y+39=0$ مستقیم خط یوه نقطه $(\frac{-39}{5},0)$ ده او میل یې $\frac{5}{12}$ دی، نو:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{5}{12}(x+\frac{39}{5})\Rightarrow y=\frac{5}{12}x+\frac{39}{12}$$

3 - د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې دوې نقطې یې معلومې وي.

هغه خط چې معادله یې $ax+by+c=0$ وي، د $(\frac{-c}{a},0)$ او $(0,\frac{-c}{b})$ له نقطو تېرېږي.

$$y_1=0 \qquad x_1=\frac{-c}{a} \qquad y_2=\frac{-c}{b} \qquad x_2=0$$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{\frac{-c}{b}-0}{0+\frac{c}{a}}(x+\frac{c}{a})=\frac{\frac{-c}{b}}{\frac{c}{a}}(x+\frac{c}{a})=-\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}(x+\frac{c}{a})$$

$$y=\frac{-a}{b}(x+\frac{c}{a})$$

څلورم مثال: د $5x-12y+39=0$ مستقیم خط عمومي معادله د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل ولیکئ چې دوې نقطې یې معلومې وي.

حل: د $5x-12y+39=0$ خط د $P_2(0,\frac{39}{12})$ او $P_1(\frac{-39}{5},0)$ له نقطو څخه تېرېږي.

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$ یا $$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$\frac{y-0}{x+\frac{39}{5}}=\frac{\frac{39}{12}-0}{0+\frac{39}{5}}$$

4- د یو مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې د X او Y له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي.

$$ax+by+c=0$$

$$ax+by=-c$$

دواړه خواوې په $(-c)$ وېشو:

$$\frac{ax}{-c}+\frac{by}{-c}=1$$

یا

$$\frac{x}{\frac{-c}{a}}+\frac{y}{\frac{-c}{b}}=1$$

پنځم مثال: د $5x-12y+39=0$ معادله د هغه مستقیم خط معادلې ته واړوئ چې له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي.

$$5x-12y=-39$$

دواړه خواوې په -39 وېشو:

$$\frac{5x}{-39}-\frac{12y}{-39}=1$$

:

$$\frac{x}{-\frac{39}{5}}+\frac{y}{\frac{39}{12}}=1$$

په دې معنا چې دا مستقیم خط د X محور د $(-\frac{39}{5},0)$ او د Y محور د $(0,\frac{39}{12})$ په نقطه کې قطع کوي.

فعالیت

د $3x - 2y = 6$ مســتقیم خط د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات د X او Y، له محوررونو ســره پیدا کړئ.

5: د یوه مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول په نورمال شکل:

څرنگه چې پوهېږو د مســتقیم خط نورمال معادله $x\cos\theta + y\sin\theta = P$ ده او عمومي معادله یې $ax + by + c = 0$ یا $ax + by = -c$ ده چې دواړه د یوه مستقیم خط ښودونکي دي، نو د ضریبونو نسبتونه یې د k د یوه ثابت عدد سره مساوي دي.

$$\frac{a}{\cos\theta} = \frac{b}{\sin\theta} = \frac{-c}{P} = k$$

$$\frac{P}{-c} = \frac{\cos\theta}{a} = \frac{\sin\theta}{b} = \frac{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

ځکه چې: $\frac{\cos^2\theta}{a^2} = \frac{\sin^2\theta}{b^2} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{a^2+b^2}$

په نتیجه کې: $\sin\theta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ او $\cos\theta = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ کېږي.

د $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ په معادله کې د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ د قیمتونو په لیکلو سره لرو چې:

$$\frac{ax}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

$$\frac{ax+by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

او یا $\frac{b}{\sin\theta} = k \quad , \quad \frac{a}{\cos\theta} = k$

نو: $k\sin\theta = b$ ، $k\cos\theta = a$ او $k^2\sin^2\theta = b^2$ ، $k^2\cos^2\theta = a^2$

$$k^2\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta = a^2 + b^2$$

$$k^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = a^2 + b^2$$

یا: $k = \pm\sqrt{a^2+b^2}$

د $ax + by = -c$ معادلې دواړه خواوې په K وېشو، نو لرو چې:

$$\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}y = -\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{یا} \quad \frac{ax+by+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

ددې لپاره چې د p قیمت هر وخت مثبت وي، نو د مخرج د جذر علامه د c مخالفه علامه ده او که $c = 0$ وي، د جذر علامه د b د علامې په شان ده.

شپږم مثال: $2x - 3y + 6 = 0$ معادله په نورمال شکل واړوئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې په $\sqrt{2^2 + (-3^2)} = \pm\sqrt{13}$ باندې وېشو. ددې لپاره چې ښي خوا مثبت وي د $\sqrt{13}$ علامه باید منفي ونیول شي:

$$\frac{2x-3y+6}{-\sqrt{13}} = 0 \quad \text{یا} \quad -\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0$$

نو θ په دویمه ناحیه (ربعه) کې ده.

له مثلثاتي جدول څخه لرو چې $\theta = 123^\circ 40'$ ده، نو ددې مســتقیم خط نورمال معادله عبارت ده له:

$$x\cos 123^\circ 40' + y\sin 123^\circ 40' - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0$$

فعالیت

د $5x - 12y + 39 = 0$ مستقیم خط معادله په نورمال شکل تبدیله کړئ.

د یوه مستقیم خط نورمال معادله $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ او د مستقیم خط عمومي معادله $ax + by + c = 0$ ده. د مستقیم خط عمومي معادله د نورمال معادلې په شکل عبارت له:

$$\frac{ax}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

پوښتنې

1 - د $x\cos 60° + y\sin 60° - 7 = 0$ مستقیم خط نورمال معادله د مستقیم خط په عمومي معادله تبدیله کړئ.

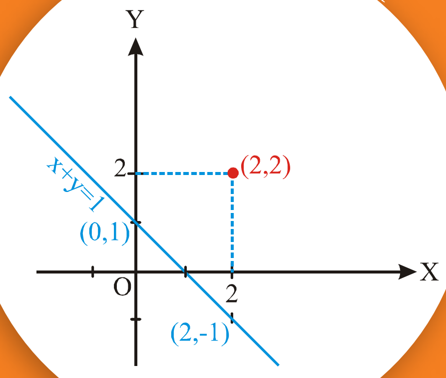
2 - د $x\cos 225° + y\sin 225° - 6 = 0$ مستقیم خط نورمال معادله، د مستقیم خط په عمومي معادله واړوئ.

3 - د مستقیم خط لاندې عمومي معادلې په نورمال شکل واړوئ.

$2x + 4y + 7 = 0$ $\qquad$ $2x + 5y - 2 = 0$ $\qquad$ $15y - 8x + 3 = 0$

د يوې نقطې فاصله له يوه مستقيم خط څخه:

(Distance of a point from a line)



آيا د (2,2) نقطې فاصله د $x+y=1$ له خط څخه پيدا کولای شئ؟

کــه د P نقطې فاصله، لکه: څنګه چې په شــکل کــې ليدل کيږي د $\overline{AB}$ له خط څخه چې د P نقطه پر $\overline{AB}$ واقع نه وي، d فرض کړو (د $\overline{AB}$ خط نه عمود وي او نه افقي)

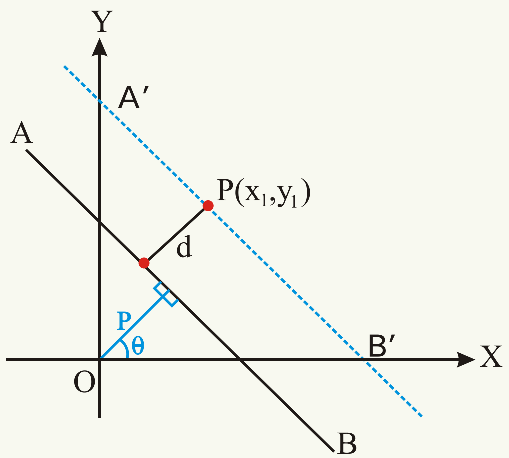
د p له نقطې څخه د $\overline{A'B'}$ مستقيم خط له $\overline{AB}$ سره موازي رسم کړئ، په دې حالت کې د AB د خط نورمال معادله عبارت ده له: $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$

خرنګــه چــې د $A'B'$ مســتقيم خط د AB له خط ســره موازي دی، نــو د $A'B'$ د خط نورمال معادله عبارت ده له:

$$x\cos\theta + y\sin\theta - (p+d) = 0 \quad \text{يا} \quad d = x\cos\theta + y\sin\theta - p$$

خرنګه چې د $P(x_1, y_1)$ نقطه د $\overline{A'B'}$ پر مستقيم خط پرته ده، نو په پورتنی معادله کې په ترتيب سره د x او y ، پرځای x_1 او y_1 ږدو، نولرو چې:

$$\boxed{d = x_1\cos\theta + y_1\sin\theta - P}$$



چــې دا معادله د $\overline{AB}$ له خــط څخه د p د نقطې فاصله ښــيي، کــه چيرې د AB د خط معادله په نورمال شــکل راکړل شــوي وي او که د $\overline{AB}$ د خط معادله په عمومي شکل $(ax+by+c=0)$ راکړل شوې وي، نو:

خرنگه چې: $\sin\theta = \dfrac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ ، $\cos\theta = \dfrac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ او $p = \dfrac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$

که دا قیمتونه د AB د مستقیم خط په نورمال معادله کې وضع کړو، لرو چې:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

د فاصلې په معادله کې که د P نقطه او د وضعیه کمیاتو مبدا د ABد خط یوې خواته واقع وي، نو د d قیمت منفي کېږي. او که د pنقطه او مبدا د AB د خط دواړو خواوو ته واقع وي د d قیمت مثبت دی. خرنگه چې فاصله هر وخت مثبت ده، نو باید چې مطلقه قیمت یې په پام کې ونیسو. (د c علامه د مخرج د جذر د علامې مخالفه علامه ده)

لومړی مثال: د $P(-2,8)$ د نقطې فاصله د $4x+3y-11=0$ له خط څخه پیدا کړئ.

حل: $a=4$ ، $b=3$ او $c=-11$ ده، خرنگه چې د c علامه منفي ده، نو د جذر علامه باید مثبت وي.

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4(-2)+3(8)-11|}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}} = \frac{|-8+24-11|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$$

فعالیت

د (5,8) نقطې فاصله د $3x-2y+7=0$ له مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

د دوو موازي خطونو تر منځ فاصله:

(Distance between two parallel lines):

د دوو موازي خطونو ترمنځ فاصله پر یو ددې خطونو د یوې نقطې فاصله ده، له بل موازي خط څخه:

دویم مثال: د $2x-5y+13=0$ او $2x-5y+6=0$ موازي مستقیمو خطونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

حل: یوه نقطه په یو ددې موازي خطونو باندې پیدا کوو، د مثال په ډول که د

$2x-5y+13=0$

په معادله کې $x=1$ وي، نو $y=3$ کېږي.

اوس نو د $(1,3)$ نقطې فاصله د $2x-5y+6=0$ له مستقیم خط څخه د فاصلې د فورمول $d=\frac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ په مرسته په لاس راوړو.

$$d=\frac{|2(1)-5(3)+6|}{\sqrt{(2)^2+(-5)^2}}=\frac{|2-15+6|}{\sqrt{4+25}}=\frac{7}{\sqrt{29}}$$

یادونه: د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د $ax+by+c=0$ مستقیم خط فاصله د $\frac{|C|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ څخه عبارت ده.

فعالیت

د $3x+2y=10$ او $y=-\frac{3}{2}x+7$ د موازي خطونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

دریم مثال: د $2x+y+2=0$ او $6x+3y-8=0$ د مستقیمو موازي خطونو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

حل: که د $2x+y+2=0$ په معادله کې $x=0$ وي، $y=-2$ کیږي. اوس د $(0,-2)$ او د $6x+3y-8=0$ د مستقیم خط فاصله په لاس راوړو:

$$d=\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|6(0)+3(-2)-8|}{\sqrt{36+9}}=\frac{14}{3\sqrt{5}}$$

د $P(x_1,y_1)$ د نقطې فاصله له یوه مستقیم خط څخه د $d=x_1\cos\theta+y_1\sin\theta-P$ او یا د $d=\frac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

پوښتني

1- د هـرو دوو جـوړو موازي خطونو ترمنځ فاصله پیداکـړئ چې معادلې یې په لاندې ډول دي:

$3x-4y+7=0$ او $3x-4y+3=0$

$12x+5y+13=0$ او $12x+5y-6=0$

$2x+4y=1$ او $x+2y-5=0$

2 - د $P(6,-1)$ نقطې فاصله له $6x-4y+9=0$ مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

3 - د $3x+6y-8=0$ او $2x+4y+5=0$ مـوازي خطونـو ترمنځ فاصله مسـاوي ده په:

a) $\frac{31}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{31}{6\sqrt{5}}$ c) $6\sqrt{5}$ d) هیڅ یو

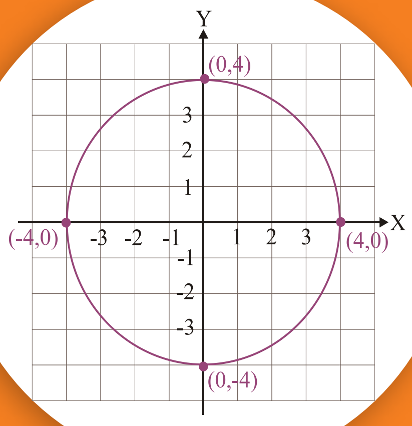
4 - د $(1,2)$ د نقطې فاصله د $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+2=0$ مستقیم خط څخه مساوي ده په:

$a:2$ $b:1$ $c:3$ $d:\frac{1}{2}$

5 - د $(-2,7)$ نقطې فاصله له $24x+7y-2=0$ مستقیم خط څخه مساوي ده په:

$a:0,04$ b: $\frac{1}{25}$ c: 4×10^{-2} d: درې واړه سم دي

دایره (Circle)



آیا د هغې دایرې معادله پیداکولای شئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې او شعاع یې 4 واحده وي؟

تعریف

دایره د هغو نقطو سټ دی چې له یوې ثابتې نقطې څخه یې فاصلې مساوي وي. چې دې ثابتې نقطې ته د دایرې مرکز (Center) او مساوي فاصلې ته د دایرې شعاع (Radius) وايي.

د دایرې معادله (Equation of circle): که $C(h,k)$ د دایرې مرکز، r د دایرې شعاع او $P(x,y)$ د دایرې په محیط یوه نقطه وي، د شکل له مخې د فیثاغورث د قضیې په اساس لرو چې:

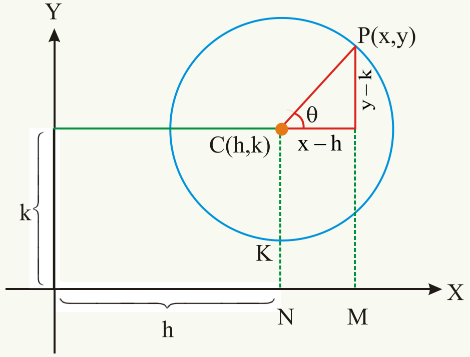
$$(\overline{CP})^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (\overline{CP} = r)$$

چې دې معادلې ته د دایرې معیاري معادله وايي. که د دایرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې وي، نو په دې حالت کې $h = k = 0$ دی او د دایرې معادله: $(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$ یا

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ده، او که $r = 0$ وي داسې دایرې ته نقطوي دایره (Point circle) وايي.



لومړی مثال: د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې مرکز يې $(-3,5)$ او د شعاع اوږدوالی يې (7) واحده وي.

حل: $r=7$, $k=5$ او $h=-3$

$$(x+3)^2+(y-5)^2=7^2$$
$$x^2+y^2+6x-10y-15=0$$

فعاليت

د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې او شعاع يې 3 واحده وي.

د يوې دايرې عمومي معادله (General form of an equation of a circle):

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2-r^2=0$$

يا:

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$

که $-k=f$ ، $-h=g$ او $h^2+k^2-r^2=c$ فرض شي، نو لرو چې:

$$(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c \quad \text{يا} \quad x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

چې دې معادلې ته د دايرې عمومي معادله وايي چې مرکز يې $(-g,-f)$ او شعاع يې $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$ ده.

که $g^2+f^2-c>0$ وي دايره حقيقي ده.

که $g^2+f^2-c=0$ دايره نقطوي ده.

که $g^2+f^2-c<0$ دايره مجازي ده. (دايره وجود نه لري)

او يا که د $x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$

په معادله کې $-2h=a$ ، $-2k=b$ او $h^2+k^2-r^2=c$ عوض کړو لرو چې

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ چې دا هم د دايرې عمومي معادله ده، ځينې وختونه د دايرې عمومي معادله داسې هم ښودل کېږي.

$Ax^2+By^2+Dx+Ey-F=0$ په دې ډول چې $A=B$ او هم علامه وي، نو دا هم د دايرې عمومي معادله ده.

خاص حالتونه:

1- که د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ د دايرې په معادله کې $h=0$ وي، نو د دايرې مرکز د Y پر محور پروت دی او د دايرې معادله دا شکل $x^2+(y-k)^2=r^2$ غوره کوي.

2- او که $k=0$ وي، د دايرې مرکز د X پرمحور پروت دی او د دايرې معادله دا: $(x-h)^2+y^2=r^2$ ده.

3- که $k=r$ وي، دايره د X پر محور مماس ده او د دايرې معادله $(x-h)^2+(y-r)^2=r^2$ ده.

4- او که $h=r$ وي، دايره د Y پر محور مماس ده او د دايرې معادله $(x-r)^2+(y-k)^2=r^2$ ده.

5- يوه دايره هغه وخت د وضعيه کمياتو له مبدا څخه تيرېږي چې د $h^2+k^2=r^2$ رابطه صدق کړي.

6- يوه دايره هغه وخت د X او Y پر محورونو مماس ده چې معادله يې دا $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ شکل ولري.

دويم مثال: د $x^2+(y-5)^2=10$ دايرې مرکز د Y پر محور پروت دی.

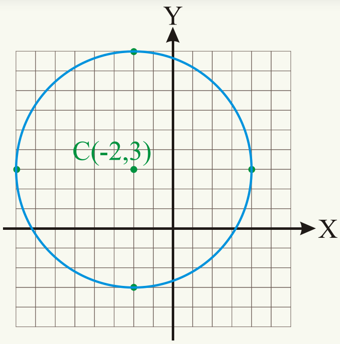
د $(x-1)^2+(y-5)^2=25$ دايره د X له محور سره مماس ده.

د $(x+3)^2+y^2=9$ د دايرې مرکز د X پر محور پروت دی.

فعاليت

په شکل کې وښياست چې د دويم مثال، د لومړي دايرې مرکز د Y پر محور پروت دی، دويمه دايره د X له محور سره مماس ده او د دويمې دايرې مرکز د X پر محور واقع دی.

دريم مثال: د هغې دايرې عمومي او معياري معادلې پيدا کړئ چې د مرکز وضعيه کميات يې $(-2,3)$ او شعاع يې 6 واحده وي او هم دا دايره رسم کړئ.



(د دايرې معياري معادله)

$$(x+2)^2+(y-3)^2=6^2$$

(د دايرې عمومي معادله)

$$x^2+y^2+4x-6y-23=0$$

څلورم مثال: وښياست چې $5x^2+5y^2+24x+36y+10=0$ ديوې دايرې معادله ده او هم ددې دايرې د مرکز وضعيه کميات او د شعاع اوږدوالی پيدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې پر 5 ووېشو، نو لرو چې:

$$x^2+y^2+\frac{24}{5}x+\frac{36}{5}y+2=0$$

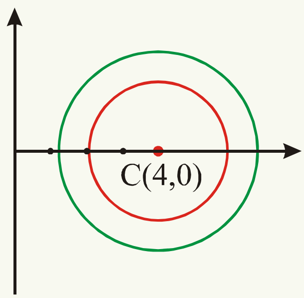
چې $g=\frac{12}{5}$، $f=\frac{18}{5}$ او $c=2$ دی.

د دايرې مرکز $(-g,-f)=(\frac{-12}{5},\frac{-18}{5})$

او د دايرې شعاع: $r=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{\frac{144}{25}+\frac{324}{25}-2}=\sqrt{\frac{418}{25}}=\frac{\sqrt{418}}{5}$

پنځم مثال: د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې د $x^2+y^2-8x+4=0$ له دايرې سره متحد المرکز (Concnteric) وي او د $x+2y+6=0$ له مستقيم خط سره مماس وي.

حل: د $x^2+y^2-8x+4=0$ دايرې مرکز $C_1(-g,-f)$ دی.



$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

$$2g=-8\Rightarrow g=-4\Rightarrow -g=4$$
$$2f=0\quad\Rightarrow\quad f=0$$

د $C_1\ (4,0)$ نقطه د هغې دايرې مرکز هم دی چې غواړو معادله يې پيداکړو، نو د C_1 وضعيه کميات د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ په معادله کې وضع کوو، لرو چې:

$$(x-4)^2+(y-0)^2=r^2$$

ددې لپاره چې د C_2 ددايرې شعاع پيداکړو، نو څرنګه چې دايره د $x+2y+6=0$ له مستقيم خط سره مماس ده. نو د $(4,0)$ د نقطې فاصله له دې مستقيم خط څخه د دايرې شعاع ده

$$d=r=\frac{|4(1)+2(0)+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt5}\quad \text{يا}\quad r^2=\frac{100}{5}=20$$

نو ددې دايرې معادله عبارت ده له: $(x-4)^2+y^2=20$ يا $x^2+y^2-8x-4=0$

شپږم مثال: د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې د $B(6,5)$ او $A(4,1)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز يې د $4x+y-16=0$ پر مستقيم خط پروت وي.

حل: که د ايرې مرکز $C(h,k)$ وي، نو د دايرې معادله $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ده، څرنگه چې مرکز يې د $4x+y-16=0$ پر مستقيم خط واقع دی، نو $4h+k=16$ دی.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \quad \text{او} \quad |AC|=|BC| \quad \text{او} \quad |AC|^2=|BC|^2$$

$$(h-4)^2+(k-1)^2=(h-6)^2+(k-5)^2$$

$$4h+8k=44$$

$$\underline{\pm 4h \pm k = \pm 16}$$

$$7k=28$$

$$k=4 \quad \Rightarrow \quad h=3$$

$$r^2=(3-4)^2+(4-1)^2=10$$

$$(x-3)^2+(y-4)^2=10 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-6x-8y+15=0$$

چې دا د غوښتل شوې دايرې عمومي معادله ده.

فعاليت

د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې د $(0,0)$ او $(2,0)$ له نقطو څخه تېرېږي او د $y-1=0$ له خط سره مماس وي.

اووم مثال: د هغې دايرې د مرکز وضعيه کميات او د شعاع اوږدوالی پيدا کړئ چې معادله يې $x^2+y^2-4x+4y-9=0$

حل:

$$x^2+y^2-4x+4y-9=0$$

$$x^2-4x+y^2+4y-9=0$$

$$x^2-4x+(-2^2)-(-2^2)+y^2+4y+2^2-2-9=0$$

$$(x-2)^2+(y+2)^2=17$$

نو مرکز یې $(2-2)$ او شعاع یې $r=\sqrt{17}$

د هغې دایرې معادله چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې واقع وي له $x^2+y^2=r^2$ څخه عبارت ده او که مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدآ کې واقع نه وي او (h,k) یې مرکز وي: معادله یې $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ یا $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ او یا $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ده.

پوښتني

1 - د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې:

a: د مرکز مختصات یې $(5,-2)$ او $r=4$ وي

b: د مرکز مختصات یې $(\sqrt{2},-3\sqrt{3})$ اوشعاع یې $r=2\sqrt{2}$ وي.

c: مرکز یې $(0,0)$ اود $(1,2)$ له نقطې څخه تېرېږي.

d: د مرکز مختصات یې $(0,0)$ او د $(-3,-4)$ له نقطې څخه تېرېږي.

e: د مرکز مختصات یې $(8,-6)$ او د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تېرېږي

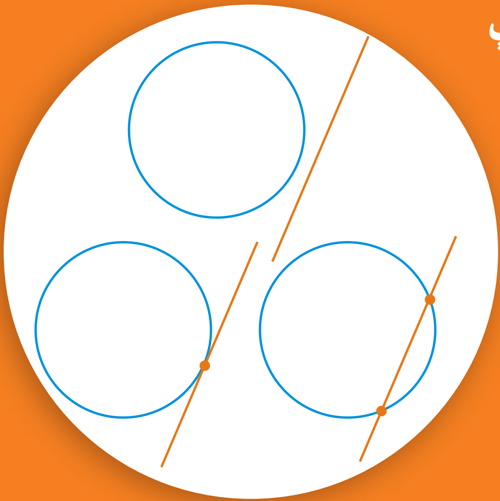
2 - لومړی وښیاست چې لاندې راکړل شوی معادلې د دایرې معادلې دي، بیا یې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

$5x^2+5y^2+14x+12y=0$ ، $x^2+y^2+12x-10y=0$

$3x^2+3y^2-2x+4y-1=0$ ، $x^2+y^2-6x+4y+13=0$

$a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0$

د يو مستقيم خط حالتونه له يوې دايرې سره:



کولای شئ چې وواياست د $3x - 4y + 20 = 0$ مستقيم خط د $x^2 + y^2 = 25$ دايره په څو نقطو کې قطع کوي؟

د $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ دايرې معادله په پام کې نيسو او غواړو چې د يو مستقيم خط حالت له دايرې سره وڅېړو چې آيا دا مستقيم خط دايره په دوو نقطو کې قطع کوي، يا مستقيم خط پر دايره مماس دی او يا دا چې مستقيم خط دايره نه قطع کوي.

د x او يا y قيمت د مستقيم خط له معادلې څخه په لاس راوړو او د دايرې په معادله کې يې وضع کوو. يوه دويمه درجه يو مجهوله معادله په لاس راځي.

1) که په دې معادله کې $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ وي، مستقيم خط دايره په دوو نقطو کې قطع کوي.

2) که $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ وي مستقيم خط له دايرې سره مماس دی.

3) او که $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ مستقيم خط دايره نه قطع کوي.

لومړی مثال: آيا د $2x = y + 7$ مستقيم خط د $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$ دايره قطع کوي؟ د تقاطع د نقطو وضعيه کميات يې پيدا کړئ.

حل: د مستقيم خط له معادلې څخه $y = 2x - 7$ ده چې د y دا قيمت د دايرې په معادله کې وضع کوو.

$$x^2 + (2x-7)^2 - 8x - 2(2x-7) + 12 = 0$$

$$5x^2 - 40x + 75 = 0$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$ يا

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4\cdot 15 = 64 - 60 = 4 > 0$$

نو دا مستقیم خط دایره په دوو نقطو کې قطع کوي او د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x_1 = 5 \;\;,\;\; x_2 = 3$$

د y قیمت د پیداکولو لپاره د $x_1 = 5$ او $x_2 = 3$ قیمتونه د مستقیم خط په معادله کې وضع کوو، نو لرو چې:

$$y_1 = 2x_1 - 7 = 2\cdot 5 - 7 = 3$$

$$y_2 = 2x_2 - 7 = 2\cdot 3 - 7 = -1$$

نو دا خط دایره د $(3,-1)$ او $(5,3)$ په نقطو کې قطع کوي.

دویم مثال: آیا د $x + 3y - 5 = 0$ مستقیم خط د $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ له دایرې سره مماس دی که نه؟

حل: د مستقیم خط له معادلې څخه لرو چې $x = 5 - 3y$ دی، د x دا قیمت د دایرې په معادله کې وضع کوو:

$$(5 - 3y)^2 + y^2 - 2(5 - 3y) + 4y - 5 = 0$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

او $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1 = 0$ نو دا مســتقیم خط له دایرې ســره مماس دی او د تماس د نقطې وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$

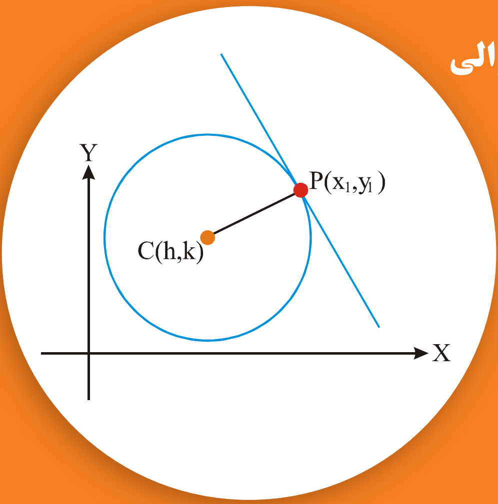
$$x = 5 - 3\cdot 1 = 2$$

نو مستقیم خط د $(2,1)$ په نقطه کې پر دایره مماس دی.

فعالیت

آیا د $x - y + 1 = 0$ مستقیم خط د $x^2 + y^2 - 5 = 0$ له دایرې سره مماس دی، که دایره په دوو نقطو کې قطع کوي او یا دا چې دایره نه قطع کوي؟

د مماس معادله او د مماس اوږدوالی



آیا د هغه مماس معادله پیداکولای شي چې د $x^2+y^2=13$ د $P(-3,-2)$ په نقطه کې په دایره مماس وي؟

کـه یو مستقیم خط پر هغـه دایره چې مرکز یې $C(h,k)$ او د $p_1(x_1,y_1)$ پـه نقطه کې پر دایره مماس وي، نو د شعاع میل مساوي دی په: $m=\dfrac{k-y_1}{h-x_1}$

او څرنګه چې شعاع د تماس په نقطه کې پر مماس عمود ده، نو د مماس میل له $-\dfrac{h-x_1}{k-y_1}$ سره مساوي دی.

څرنګه چې د مستقیم خط یوه نقطه $P_1(x_1,y_1)$ او میل یې $-\dfrac{h-x_1}{k-y_1}$ دی.

د مستقیم خط د $y-y_1=m(x-x_1)$ معادلې په نظر کې نیولو سره لرو چې:

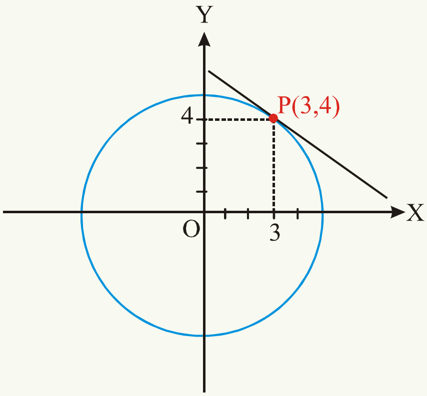
$$y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$$

چې دا د هغه مماس معادله ده چې د $P_1(x_1,y_1)$ په نقطه کې پر دایره مماس دی.

او کـه د دایـرې مرکـز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، نو پـه دې حالت کې $h=k=0$ دی او د مماس معادله دا شکل اختیاروي.

$$yy_1+xx_1=x_1^2+y_1^2 \qquad \text{یا} \qquad y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

څرنګه چې $x_1^2+y_1^2=r^2$ ، نو د مماس معادله $yy_1+xx_1=r^2$ ده.



لومړی مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(3,4)$ په نقطه کې د $x^2 + y^2 = 25$ پر دایره مماس وي:

حل: څرنګه چې د دایرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې دی، نو: $y \cdot 4 + x \cdot 3 = 25$

نو د مماس معادله عبارت ده له: $3x + 4y = 25$

او یا $3x + 4y - 25 = 0$.

دویم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $P(3,5)$ په نقطه کې پر هغې دایرې مماس دي چې مرکز یې $(1,2)$ دی.

$h = 1 \qquad k = 2$

$x_1 = 3 \qquad y_1 = 5$

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$$

$$m = -\frac{1-3}{2-5} = -\frac{2}{3}$$

$$y - 5 = -\frac{2}{3}(x - 3)$$

$$2x + 3y = 21$$

یا:

$$2x + 3y - 21 = 0$$

د مماس اوږدوالی

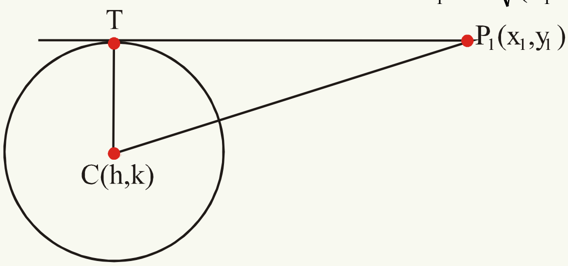
که د $P_1(x_1, y_1)$ له نقطې څخه چې له دایرې د باندې واقع ده، د $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ پر دایره د P_1T. مماس د شکل په شان رسم شي، د (T) د تماس نقطه د دایرې له مرکز (C) سره ونښلوو، دفیثاغورث د قضیې په اساس د P_1TC په قایمه زاویه مثلث کې لرو چې:

$$(\overline{P_1C})^2 = (\overline{P_1T})^2 + (\overline{CT})^2$$

یا $(P_1T)^2 = (P_1C)^2 - (CT)^2$

له بلې خوا: $(P_1C)^2 = (x_1-h)^2 + (y_1-k)^2$ او $\overline{CT} = r$ نو د مماس اوږدوالی مساوي

دی په: $\overline{P_1T} = \sqrt{(x_1-h)^2 + (y_1-k)^2 - r^2}$



په یاد ولرئ چې د مماس په امتداد د مماس د اوږدوالي د پیداکولو لپاره د دایرې له کومې خارجي نقطې څخه د x او y قیمتونه د دایرې په معادله کې وضع کوو.

دریم مثال: د $(-5,10)$ له نقطې څخه د $5x^2 + 5y^2 + 14x + 12y - 10 = 0$ پر دایره د مماس اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې پر 5 وېشو، نو لرو چې: $x^2 + y^2 + \frac{14}{5}x + \frac{12}{5}y - 2 = 0$

$$\text{د مماس اوږدوالی} = \sqrt{(-5)^2 + (10)^2 - 14 + 24 - 2} = \sqrt{133}$$

فعالیت

د هغه مماس اوږدوالی پیداکړئ چې د $P(-2,2)$ له نقطې څخه د $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ پر دایره باندې مماس وي.

د دایرې په معادله کې د مستقیم خط د یو مجهول په وضع کولو سره، یوه دویمه درجه یو مجهوله معادله په لاس راځي، که په دې معادله کې $\Delta > 0$ وي، مستقیم خط دایره په دوو

نقطـوکـي قطع کوي او که $\Delta = 0$ وي خط پر دايره مماس دی او که $\Delta < 0$ وي، مسـتقيم خط دايره نه قطع کوي.

د هغـه مسـتقيم خط معادله چـې د $P_1(x_1, y_1)$ په نقطه کـې پر هغه دايره چـې مرکز يې (h,k) دی مماس وي، عبارت ده له:

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$$

که د دايرې مرکز د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي، نو د مماس معادله: $yy_1 + xx_1 = x_1^2 + y_1^2$

يا $yy_1 + xx_1 = r^2$ ده، د مماس اوږدوالی د $P(x, y)$ له نقطې څخه چې د دايرې د باندې واقع ده او د دايرې مرکز (h,k) دی مساوي ده په:

$$\overline{PT} = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2 - r^2}$$

پوښتنې

1 - د لاندې مسـتقيمو خطونو حالتونه له دايرو سـره چې معادلې يې په لاندې ډول راکړل شـوي دي وڅېړئ.

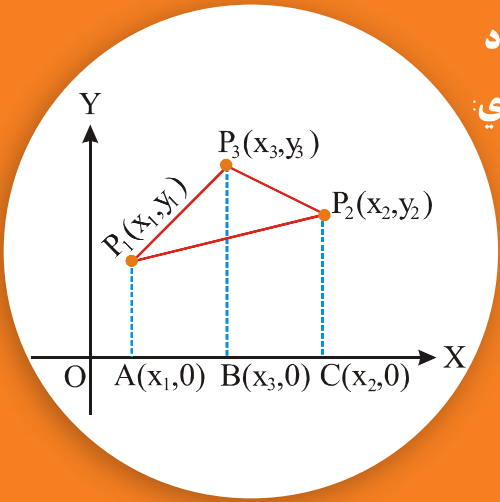
د مستقيمو خطونو معادلې	د دايرو معادلې
$3x - 2y + 3 = 0$	$x^2 + y^2 - 4x - y - 3 = 0$
$x - y - 1 = 0$	$2(x^2 + y^2) - 3x + 2y - 6 = 0$
$5x - y = 1$	$x^2 + y^2 - x - 9y + 14 = 0$

2- د هغه مستقيم خط معادله پيداکړئ چې په $(2,-3)$ نقطه کې د $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ له دايرې سره مماس وي.

3 - د هغه مماس اوږدوالی پيدا کړئ چې د $(-5,4)$ له نقطې څخه د $5x^2 + 5y^2 - 10x + 15y - 131 = 0$ پر دايره مماس رسم شوی وي

4- د هغه مماس اوږدوالی پيداکړئ چې د $(-2,-5)$ له نقطې څخه د $x^2 + y^2 + 8x + 5y = 7$ پر دايره مماس رسم شوی وي.

د مثلث د مساحت پیدا کول چې د راسونو وضعیه کمیات یې معلوم وي:



آیا د هغه مثلث مساحت پیداکولای شئ چې رأسونه یې $(-3,6)$ ، $(3,2)$ او $(6,0)$ وي؟

که P_1 ، P_2 او P_3 لکه چې په شکل کې لیدل کېږي د یوه مثلث راسونه وي. د X پر محور $\overline{P_1A}$ ، $\overline{P_2C}$ او $\overline{P_3B}$ درې عمود خطونه رسم کړئ.

د $P_1P_2P_3$ مثلث مساحت = د P_1ABP_3 ذوذنقې مساحت + د P_3BCP_2 ذوذنقې مساحت − د P_1ACP_2 ذوذنقې مساحت

لکه څرنګه چې پوهېږو:

د ذوذنقې مساحت = (د موازي ضلعو د نیمايي مجموعه) × (د موازي ضلعو ترمنځ فاصله)

نو:

$$\text{د } \overset{\Delta}{P_1P_2P_3} \text{ مثلث مساحت} = \frac{1}{2}(|P_1A|+|P_3B|)(|AB|)+\frac{1}{2}(|P_3B|+|P_2C|)(|BC|)$$

$$-\frac{1}{2}(|P_1A|+|P_2C|)(|AC|)$$

$$=\frac{1}{2}[(y_1+y_3)(x_3-x_1)]+\frac{1}{2}[(y_3+y_2)(x_2-x_3)]-\frac{1}{2}[(y_1+y_2)(x_2-x_1)]$$

$$=\frac{1}{2}(x_3y_1+x_3y_3-x_1y_1-x_1y_3+x_2y_3+x_2y_2$$

$$-x_3y_3-x_3y_2-x_2y_1-x_2y_2+x_1y_1+x_1y_2)$$

$$=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

مثال: که چېرې $A(4,-5)$ ، $B(5,-6)$ او $C(3,1)$ د یوه مثلث راسونه وي، ددې مثلث مساحت پیداکړئ.

حل: $x_1=4 \quad , \quad y_1=-5 \quad , \quad x_2=5 \quad , \quad y_2=-6 \quad x_3=3 \quad y_3=1$

$$\text{د } \overset{\Delta}{ABC} \text{ مثلث مساحت} = \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

$$=\frac{1}{2}\left[4(-6-1)+5(1+5)+3(-5+6)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(-28+30+3)=\frac{1}{2}\cdot 5=\frac{5}{2}=2.5$$

□

که د $P_1P_2P_3$ مثلث رأسونه $P_1(x_1,y_1)$ ، $P_2(x_2,y_2)$ او $P_3(x_3,y_3)$ وی، نو د مثلث مسـأحت د $\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$ له فورمول څخه په لاس راځي.

پوښتني

1 - د هغه مثلث مساحت پیداکړئ چې رأسونه یې $A(0,0)$ ، $B(8,6)$ او $C(12,4)$ وي.

2 - کـه د یـوه مثلث رأسـونه $A(4,0)$ ، $B(-4,0)$ او $C(0,3)$ وي، ددې مثلث مسـاحت پیدا کړئ.

3 - د هغـه څلور ضلعي مسـاحت پیـداکړئ چې رأسـونه یې $A(1,0)$ ، $B(6,2)$ ، $C(8,6)$ او $D(2,4)$ وي.

• د وضعيه کمياتو په مستوي کې هغه نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د y مختصه يې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي د x مختصه يې صفر ده

• د $P(x_1, y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ د دوو نقطو ترمنځ فاصله د $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

• د p د نقطې وضعيه کميات چې د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط د r په نسبت وېشي عبارت دي له: $y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}$ □ $x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}$ او د $\overline{P_1 P_2}$ د قطعه خط د تنصيف د نقطې وضعيه کميات عبارت دي له:

$y=\frac{y_1+y_2}{2}$ □ $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ که د p نقطه د $\overline{P_1 P_2}$ خط داخلاً د r په نسبت ووېشي نو r مثبت اوکه خارجاً يې و وېشي، نو r منفي دی.

• د يو مستقيم خط ميل چې د $P_1(x_1, y_1)$ او $P_2(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي د $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ له فورمول څخه په لاس راځي د X د محور او د هغو خطونو ميل چې د X له محور سره موازي وي صفر او د Y د محور او د هغو خطونو ميل چې د Y له محور سره موازي وي، تعريف شوي نه دي. که د يوه مستقيم خط د ميل زاويه حاده وي، ميل يې مثبت او که منفرجه وي ميل يې منفي دی.

• د هغې مستقيم خط معادله چې ميل او د Y له محور سره يې تقاطع معلومه وي، عبارت ده له: $y=mx+b$.

د هغه مستقيم خط معادله چې ميل او يوه نقطه يې معلومه وي، عبارت ده له:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

د هغه مستقيم خط معادله چې دوې نقطې يې معلومې وي عبارت ده له:

$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ اويا $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ او د هغه مستقيم خط معادله چې

له محورونو سره يې د تقاطع نقطې معلومې وي: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ده.

• د يوه مستقيم خط نورمال معادله $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ او د مستقيم خط عمومي معادله $ax+by+c=0$ ده.

• د $P(x_1, y_1)$ د نقطې فاصله له يوه مستقيم خط څخه د $d = x\cos\theta + y\sin\theta - P$ او يا د $d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

• د هغې دايرې معادله چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې واقع وي له $x^2+y^2=r^2$ څخه عبارت ده او که مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې واقع نه وي او (h,k) يې مرکز وي، معادله يې: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

يا $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ او يا $x^2+y^2+ax+by+c=0$

• د دايرې په معادله کې د مستقيم خط د يو مجهول په وضع کولو سره، يوه دويمه درجه يو مجهوله معادله په لاس راځي، که په دې معادله کې $\Delta>0$ وي، مستقيم خط دايره په دوو نقطو کې قطع کوي او که $\Delta=0$ وي خط پر دايره مماس دی او که $\Delta<0$ وي، خط دايره نه قطع کوي.

• د هغه مستقيم خط معادله چې د $P_1\ (x_1, y_1)$ په نقطه کې پر هغه دايره چې مرکز يې (h,k) دی مماس وي عبارت ده له: $y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$

او که د دايرې مرکز د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي، نو د مماس معادله يې:

$yy_1+xx_1=x_1^2+y_1^2$ يا $yy_1+xx_1=r^2$ ده او د PT مماس اوږدوالی د $P(x_1, y_1)$ له نقطې څخه چې له دايرې د باندې واقع ده او مرکز يې (h,k) دی، مساوي ده په:

$$\overline{PT}=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2-r^2}$$

• که د يوه مثلث رأسونه $P_1\ (x_1, y_1)$، $P_2\ (x_2, y_2)$ او $P_3\ (x_3, y_3)$ وي، نو $\square P_1P_2P_3$ د مثلث مساحت د $\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$ له فورمول څخه په لاس راځي.

د څپرکي پوښتنې:

1 - د لاندې هرې جوړې نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ او همدرانګه ددې مستقیمو خطونو د تنصیف د نقطو وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د A او B له دوو نقطو څخه تېرېږي.

$A(3,1)\ , B(-2,-4)$ $\qquad A(-8,3)\ \ , B(2,-1)$

$A(-\sqrt{5},-\frac{1}{3})\ ,\ B(-3\sqrt{5},5)$

2 - که $A(\sqrt{3},-1)$ ، $B(0,2)$ او $C(h,-2)$ د یوه قایم الزاویه مثلث راسونه وي او د $\hat{A}=90°$ وي، د (h) قیمت پیدا کړئ.

3 - د p د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، په داسې حال کې هغه مستقیم خط چې د $A(1,4)$ او $B(5,6)$ له نقطو څخه تېرېږي د $\frac{AP}{PB}=2$ په نسبت و وېشي.

4 - د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې میل یې (-2) او د Y محور په 3 کې قطع کړي.

5 - د $x=\sqrt{7}$ او $y=-\sqrt{7}$ د خطونو میل پیدا کړئ.

6 - د y د محور میل مساوي دی په:

$a)\ -1$ $\qquad b)\ 1$ $\qquad c)\,0$ $\qquad d)$ تعریف شوی نه دی

7 - دیوه مستقیم خط میل $m=\frac{2}{3}$ دی، د هغه خط میل چې پر دې خط عمودوي، مساوي دی په:

$a)\ \frac{2}{3}$ $\qquad b)\ -\frac{2}{3}$ $\qquad c)\,\frac{3}{2}$ $\qquad d)\,\frac{-3}{2}$

8 - د هغو مستقیمو خطونو میل پیدا کړئ چې د لاندې راکړل شوو نقطو له جوړو څخه تېرېږي.

$(4,8)$ او $(4,6)$ $\qquad (2,7)$ او $(3,-2)$ $\qquad (5,11)$ او $(-2,4)$

9 - د $4x-y+2=0$ او $12x-3y+1=0$ مستقیم خطونه:

a) موازي دي $\qquad$ b) عمود دي $\qquad$ c) نه موازي او نه عمود دي

10 - د $3x-4y+3=0$ او $3x-4y+7=0$ مستقیمو خطونو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

11 - د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(-4,7)$ له نقطې تېر شي او د $2x-7y+4=0$ له مستقیم خط سره موازي وي.

12 - د $P(6,-1)$ نقطې فاصله د $6x-4y+9=0$ له مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

13 - د p د نقطې وضعیه کمیات په داسې حال کې پیدا کړئ چې $\overline{P_1P_2}$ مستقیم خط چې د $P_1\ (2,-5)$ او $P_2\ (6,3)$ له نقطو څخه تېرېږي د $\frac{3}{4}$ په نسبت ووېشئ.

14 - د لاندې مستقیمو خطونو معادلې نورمال شکل ته واړوئ.

$2x+5y-2=0 \qquad 2x-3y+6=0$

15 - د هغه مستقیم خط میل چې د $(4,0)$ او $(-4,0)$ له نقطو څخه تېرېږي مساوي دی په:

a) 1 b) -1 c) 0 d) تعریف شوي نه دی

16 - د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 10 واحده او نورمال خط یې د X محور له مثبت جهت سره د $30°$ زاویه جوړوي.

17 - د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې راسونه یې $A(2,3)$ ، $B(-1,1)$ او $C(4,-5)$ وي.

18 - د هغه مثلث مساحت چې رأسونه یې $A(1,4)$ ، $B(2,-3)$ او $C(3,-10)$ دي مساوی دی په:

a) 1 b) 2 c) 0 d) هېڅ یو

19 - د $x+2y=6$ د مستقیم خط د تقاطع نقطې د $x^2+y^2-2x-2y-39=0$ له دایرې سره پیدا کړئ.

20 - د هغې دایرې معادله پیدا کړی چې د $A(1,1)$, $B(2,-1)$ او $C(3,-2)$ له نقطو څخه تېرېږي.

21 - د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې د $A(3,-1)$ او $B(0,1)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز یې د $4x-3y-3=0$ پر مستقیم خط واقع وي.

22 - د $4x^2+4y^2-8x+12y-25=0$ دایرې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع اوږدوالی یې پیداکړئ.

23 - د هغې دایرې معادله پیدا کړی چې د $A(4,1)$ او $B(6,5)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز یې د $4x+y-16=0$ پر مستقیم خط باندې واقع وي.

24 - که د یوه مثلث رأسونه $A(5,-6)$ ، $B(-3,5)$ او $C(-1,2)$ وي، دا مثلث:

c) مختلف الاضلاع دی b) متساوی الساقین دی a) متساوی الاضلاع دی

25 - که د یوه مثلث رأسونه په ترتیب سره $(5,4)$ ، $(4,10)$ او $(7,8)$ وي دا مثلث:

c) مختلف الاضلاع دی b) متساوي الساقین دی a) متساوي الاضلاع دی

26 - کــه $P(-8,4)$ او $Q(2,-1)$ وي د A د نقطـې مختصات پیدا کړئ که د A نقطه د PQ خط داخلاً او خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي.

27 - د $x-y+1=0$ مسـتقیم خـط د تقاطـع نقطې له $x^2+y^2=5$ دایرې سـره پیدا کړئ.

28 - کــه د $x+ay-5=0$ مســتقیم خط د $x^2+y^2-2x+4y=0$ پــر دایره مماس وي، د a قیمت پیدا کړئ.

29 - د هغې دایرې معادله چې د $(0,0)$ او $(2,0)$ له نقطو څخه تېرېږي او د $y-1=0$ له مستقیم خط سره مماس وي، عبارت ده له:

a) $x^2+y^2-4x=0$ b) $x^2+y^2-2x=0$ c) $x^2+y^2+2x=0$

30 - هغه دایره چې معادله یې $x^2+y^2-6x+4y+14=0$ ده:

c) موهومي ده b) نقطوي ده a) حقیقي ده

31 - هغه دایره چې معادله یې $x^2+y^2+2x-4y+5=0$

a) موهومي ده b) نقطوي ده c) حقیقي ده

32 - کــه $A(4,-3)$ او $B(-2,-5)$ وي د A او B د نقطـو ترمنځ فاصله پیدا کړئ او هم د $\overline{AB}$ د خط د تنصیف نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

33 - کــه د یوه مثلث رأســونه $A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ او $C(-1,5)$ وي، وښیاســت چې دا مثلث قایم الزاویه مثلث دی.

34 - وښیاست چې $A(0,0)$ ، $B(a,0)$ ، $C(0,b)$ او $D(a,b)$ د یو مستطیل رأسونه دي او هم وښیاست چې د مستطیل د قطرونو اوږدوالی سره مساوي دی.

35 - وښیاست چې $A(3,1)$ ، $B(6,2)$ او $C(9,3)$ نقطې پر یوه مستقیم خط واقع دي.

36 - د هغـه مسـتقيمو خطونـو معادلې پيدا کړئ چـې د لاندې هروجوړو لـه نقطو څخه تېرېږي.

(5,8)	(1,2)	(3,5)	(8,15)
(−1,−3)	(2,−1)	(−2,−1)	(3,−4)
(0,3)	(5,0)	(0,2)	(−2,0)

37 - د هغـه مسـتقيم خط معادله چې د (5,8) او (−1,10) له نقطو څخـه تېرېږي عبارت ده له:

$$a: \quad y = -\frac{1}{3}x + 9\frac{2}{3}$$

$$b: \quad y = -\frac{x}{3} + 9\frac{2}{3}$$

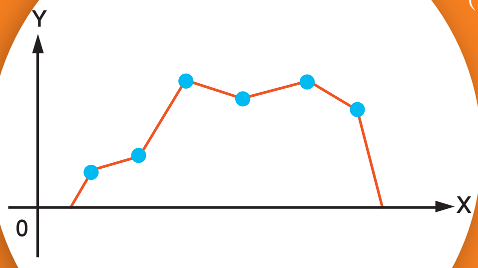
$$c: \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{29}{3}$$

d: درې واړه سم دي

اتم خچرکی احصائیه



د فریکونسي څو ضلعي ګراف
(Frequency Polygon graph)



مخامخ شکل په پام کې ونیسئ، آیا کولای شئ د راکړل شوي منحني لاندې مساحت پیدا کړئ؟ آیا ویلای شئ چې تر منحني لاندې مساحت له څه شي سره برابر دی؟

فعالیت

د فریکونسیو مخامخ جدول په نظر کې ونیسئ.

فریکونسي	د کلاس (صنف)مرکز	کلاسونه
3	11.5	10-13
6	14.5	13-16
7	17.5	16-19
4	20.5	19-22

- د هر کلاس (صنف) مرکز د لومړی مختصې او اړونده فریکونسي یې د دویمې مختصې په حیث د مرتبو جوړو په شکل په نظر کې ونیسئ.
- ددې مرتبو جوړو موقعیت د قایمو وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- هغه نقطې چې په مستوي کې له دې مرتبو جوړو څخه په لاس راځي، سره ونښلوئ.

آیا کولای شئ چې ددې ګراف لاندې مساحت پیدا کړئ؟

- د X پر محور د ګراف دواړو خواوو ته (8.5,0) او (38.5,0) نقطې زیاتې کړئ. په لاس راغلی ګراف د فریکونسي جدول له مستطیلي ګراف سره یوځای رسم کړئ او د مستطیلونو مساحت د منحني لاندې مساحت سره پرتله کړئ.

په څو ضلعي ګراف کې د هر کلاس مرکز پر افقي محور اود هر کلاس مطلقه فریکونسي یا نسبي

فریکونسي پر عمودي محور ښودل کېږي، د کلاس مرکز (منځني نقطه) او د کلاس د فریکونسیو په مقابل کې په مستوي کې یوه نقطه ټاکل کېږي چې عرض یې د کلاس مرکز او اوږدوالی یې د هماغه کلاس له فریکونسیو سره برابر دی، د جدول د کلاسونو په شمېر په مستوي کې په هماغه اندازه نقطې په لاس راځي. که د کلاسونو په اول او اخر کې دوي نورې د $(x_1 - c , 0) , (x_n + c , 0)$ اختیاري نقطې زیاتې کړئ، څرنګه چې c د هر کلاس وسعت دی یعنې (پاسني سرحد منفي د هماغه صنف لاندینی سرحد) چې ددې نقطو له نښلولو څخه یو ګراف په لاس راځي چې د فریکونسي څو ضلعي ګراف نومیږي.

مثال: د لاندې جدول د ډیټا (Data) مستطیلي (هستوګرام) او د فریکونسیو څو ضلعي ګرافونه یې رسم کړئ.

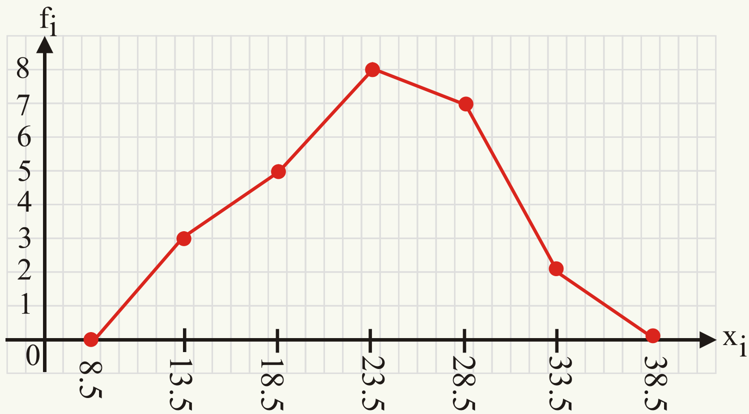
د کلاسونو حدود = CL	11-16	16-21	21-26	26-31	31-36
مطلقه فریکونسي = f_i	3	5	8	7	2
د کلاسونو مرکز = X_i	13.5	18.5	23.5	28.5	33.5

پوهېږو چې $c = 5$ ده، ددې لپاره چې دوه اختیاري نقطې په لاس راوړو، نو:

$$(x_1 - 5 \ , \ 0) = (13.5 - 5 \ , \ 0) = (8.5 \ , \ 0)$$

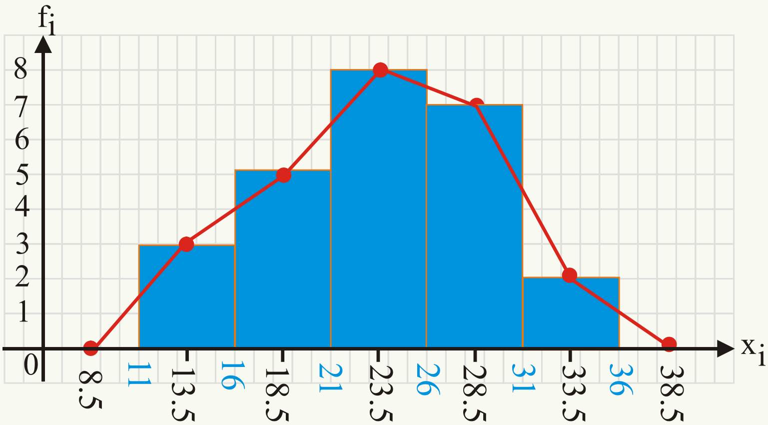
$$(x_n + 5 \ , \ 0) = (33.5 + 5 \ , \ 0) = (38.5 \ , \ 0)$$

ددې نقطو $(8.5 , 0)$ او $(38.5 , 0)$ په اضافه کولو سره ګراف رسموو:



د فریکونسي څو ضلعي ګراف

مستطیلي ګراف د فریکونسي څو ضلعي ګراف سره:



له پورتني ګراف څخه لیدل کیږي چې:

- د فریکونسیو څو ضلعي ګراف راسونه تر مطالعې لاندې دفریکونسیو له جدول د اړونده مستطیل د پورتنی ضلعې منځني نقطه سره واقع دي.
- د فریکونسیو څو ضلعي ګراف د لاندې سطحې مساحت د مستطیلي ګراف له مساحت سره برابر دی.
- د نسبي فریکونسیو څو ضلعي ګرافونه زیات د متصلو ډیټاوو (Data) له پاره کارول کیږي.

پوښتنې

1 - د نهم اولسم ټولګیو د 24 زده کوونکو د تنې لوړوالی د سانتي متر په حساب په لاندې ډول راکړل شوی دی.

138	107	136	128	148	118
142	129	115	123	133	123
121	128	122	144	126	135
152	98	117	153	141	126

د پورتنی ډیټا (Data) لپاره د فریکونسي یو جدول ترتیب کړئ.ډیټا (Data) په شپږو طبقو وویشئ، ددې ډیټا (Data) د ښودلو لپاره کوم ډول ګراف ښه دی، د فریکونسیو څو ضلعي ګراف رسم کړئ.

د ساقې او پاڼې ګراف



موږ د عددونو په نړۍ کې ژوند کوو، هر تن د خپل هیواد د ټولنې د یو غړي په حیث یوه خاصه شمېره لري چې د نورو مشخصو په شان د اهمیت وړ ده. آیا ویلای شئ چې دا شمېره څه شی ده؟ او آیا تاسو هم خپله شمېره پیژنئ؟

فعالیت

- په لاندې جدول کې د سانتي متر په حساب د 20 نویو پیدا شوو ماشومانو د تنې لوړوالی چې په تصادفي ډول انتخاب شوی دی، راکړل شوی دی.

45	46	47	43	49	40	42	46	45	43
43	43	48	49	47	49	48	49	47	45

- پورتنی ډیټا (Data) له کوچني عدد څخه لوی عدد ته ترتیب کړئ.

- لیدل کېږي چې په دې ټولو عددونو کې د 4 رقم مشترک دی، کولای شو چې دا رقمونه په لاندې ډول ولیکو.

$$40 + (0,2,3,3,3,3,5,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9,9,9,9)$$

- له 0 تر 9 پورې رقمونه هر یو رقم څو واري تکرار شوی دی.

پورتني رقمونه په لاندې شکل لیکو.

4	0			
	2			
	3	3	3	3
	5	5	5	
	6	6		
	7	7	7	
	8	8		
	9	9	9	9

• که د عددونو پورتنی شکل د °90 زاویې په اندازه کیڼې خوا ته دوران ورکړئ، دا شکل له کوم ډول ګراف سره مشابه دی؟

ډیټا عموماً د عددونو په شکل وي. له دې عددونو څخه څرنګه چې په پورتني فعالیت کې ولیدل شول، کولای شو، ګراف یې جوړ کړو چې دا ګراف د ساقې او پاڼې د ګراف په نامه یادیږي.

او که دې ګراف ته د °90 زاویې په اندازه کیڼې خواته دوران ورکړو، میله یي ګراف لاس ته راځي.

د مثال په ډول که ډیټا د صفر او 100 ترمنځ وي، کولای شو، لکه: د 37 عدد 3 په ساقه او (7) د پاڼې په حیث ولیکو.

د ساقې او پاڼې ګراف د هغو ډیټا (Data) لپاره چې تر ټولو لوی او تر ټولو کوچنی ډیټا (Data) ترمنځ توپیر یې لږ وي، مناسب دی.

لومړی مثال: د کتابونو په یو پلورنځي کې 20 ډوله کتابونه چې هر ډول شمېر یې په لاندې جدول کې راکړل شوی دی، ددې ډیټا (Data) د ساقې او پاڼې ګراف رسم کړئ.

39	39	38	38	28	27	23	15	11	10
65	58	57	52	46	46	45	44	41	40

حل: ښکاره ده چې د ډیټا (Data) د کیڼې خوا اولني عددونه 5.4.3.2.1 او 6 دي. چې دا عددونه د ساقې لپاره په نظر کې نیسو. او د هرې خانګې اړونده ډیټا ورته ددې عددونو مخکې لیکو چې په لاندې ډول لاس ته راځي.

ساقه	پاڼې
1	0 1 5
2	3 7 8
3	8 8 9 9
4	0 1 4 5 6 6
5	2 7 8
6	5

که د کتاب مخ ته د ساعت د ستنې حرکت په مخالفه خوا کې د 90° زاویې په اندازه دوران ورکړو. داګراف د میله یي ګراف په شکل بدلېږي چې په لاندې ډول یې لیکلای شو.

فریکونسی						
6				6		
5				6		
4			9	5		
3	5	8	9	4	8	
2	1	7	8	1	7	
1	0	3	8	0	2	5
	1	2	3	4	5	6

دویم مثال: د ریاضي په یوه امتحان کې لاندې نتیجې له زده کوونکو څخه پلاس راغلي دي، ددې ډیټا لپاره د ساقې او پاڼې ګراف رسم کړئ.

25 45 46 50 50 50 55 55 55 55
55 57 58 58 60 60 62 65 67 72

حل: د ساقې د رسم لپاره له لسیزو رقمونو او د پاڼې د ترسیم لپاره له یوویزو رقمونو څخه استفاده کوو:

ساقه	پاڼې										
2	5										
3											
4	5	6									
5	0	0	0	5	5	5	5	5	7	8	8
6	0	0	2	5	7						
7	2										

پوښتنې

1- د لاندې ډيټا (Data) لپاره د ساقې او پاڼې ګراف رسم کړئ.

7.9	8.3	10.9	11.7	8.4	9.1	6.8	12.5
11.2	7.8	12	11.3	8.4	13	6.8	

پاملرنه: د ساقې او پاڼې د ګراف د ښودلو لپاره د 8.3 عدد د 83 په شکل او د 11.2 عدد د 112 په شکل او د 12 عدد د 120 په شکل ليکو.

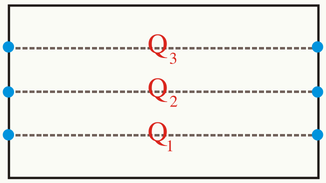
ربعي (څلورمي)



په مخامخ شکل کې چې که دا د خلکو ټولنه نظر د دوی د تني د لوړوالي په نسبت په څلورو مساوي برخو و وېشل شي، هره برخه یې په کوم نامه یادوي ؟

فعالیت

مخامخ شکل یو مستطیل دی چې د Q_1, Q_2 او Q_3 خطونو په واسطه په څلورو مساوي برخو وېشل شوی دی.



- د مستطیل د مساحت څو فیصده مساحت د Q_1 د خط لاندې، څو فیصده مساحت د Q_1 د خط له پاسه واقع دی؟
- دمستطیل څو فیصده مساحت د Q_2 تر خط لاندې او څوفیصده مساحت د Q_2 د خط له پاسه دی؟
- د مستطیل څو فیصده مساحت د Q_3 تر خط لاندې او څو فیصده مساحت د Q_3 د خط له پاسه دی؟

هغه عددونه چې ترتیب شوي ډیټا په څلورو مساوي برخو وېشي، دغه عددونو ته لومړی ربع، دویمه ربعه او دریمه ربع وایي او په Q_1, Q_2 او Q_3 سره ښودل کېږي.

لومړی ربع هغه مقدار دی چې 25% ډیټا له هغې لاندې او 75% ډیټا له هغې پورته واقع وي.

دویمه ربع هغه مقدار دی چې 50% ډیټا له هغې لاندې او 50% ډیټا له هغې پورته واقع وي.

دریمه ربع هغه مقدار دی چې 75% ډیټا ترې لاندې او 25% ډیټا یې له پاسه واقع وي.

که ډیټا (Data)په صعودي ډول ترتیب کړو، د ډیټا (Data)میانه د Q_2 سره مساوي لومړنی نیمايي ډیټا (Data) میانه له Q_1 سره مساوي او همدارنګه د دویمي نیمايي میانه له Q_3 سره مساوي ده.

د ربعو د پیداکولو په وخت کې لاندې پړاونه په پام کې ونیسئ.

- ډېټا (Data)په صعودي ډول ترتيب کړئ.
- ترتيب شوی ډيټا ته له (1) څخه تر n پورې شمېره (کوډ) ورکړئ.
- د P ام موقعيت ($P = 1,2,3$) دلاندې رابطې په مرسته په لاس راځي.

$$C_{QP} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

•د ربعې د موقعيت په اساس، د ربعې مقدار وټاکئ.

مثال: فرض کړئ په لاس راغلي ډيټا (مشاهدې) په لاندې ډول راکړل شوي وي.

90 85 80 120 100 140

د لومړۍ او درېمې ربعې ځايونه وټاکئ.

د لومړۍ او درېمې ربعې مقدارونه پلاس راوړئ.

د ډيټا شمېره:	6	5	4	3	2	1
ډيټا :	140	120	100	90	85	80

د لومړۍ او درېمې ربعې ځايونه عبارت دي له:

$$C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 2$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 5$$

نو د لومړۍ او درېمې، ربعې مقدارونه مساوي دي په:

$Q_1 = 85$ $\qquad$ $Q_3 = 120$

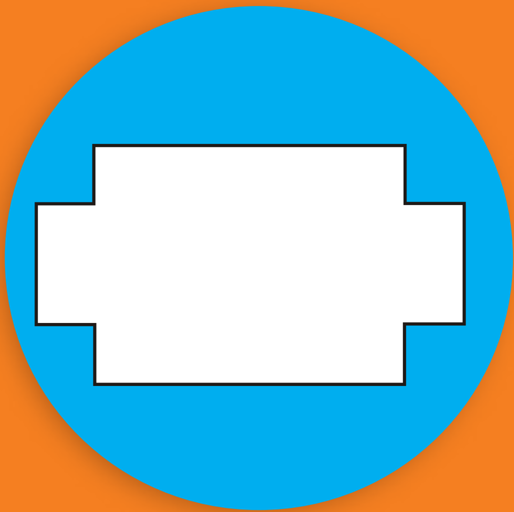
پوښتنې

فرض کړئ په لاس راغلي ډيټا په لاندې ډول راکړل شوي وي.

100 90 80 120 160 140 85

- لومړۍ او درېمه ربعې (څلورمې) پيدا کړئ.
- له ميانې تر مخه عددونه وليکئ.
- له ميانې وروسته عددونه په لاس راوړئ.

صندوقچه يي ګراف



د يوې تختې کاغذ له څلورو کنجونو څخه څلور مربعګانې چې هره ضلع يې $5cm$ وي، جلا کړئ، بيا د کاغذ څنډې له پورته خواڅخه قات کړئ.

کوم شکل چې په لاس راځي، له څه شي سره ورته والی لري؟

فعاليت

د هغه ناروغانو شمېر چې د 17 ورځو، په موده کې يوه روغتون ته راغلي دي، په لاندې ډول ثبت شوي دي.

11 10 15 23 14 27 16 17 24

28 13 31 31 18 25 26 19

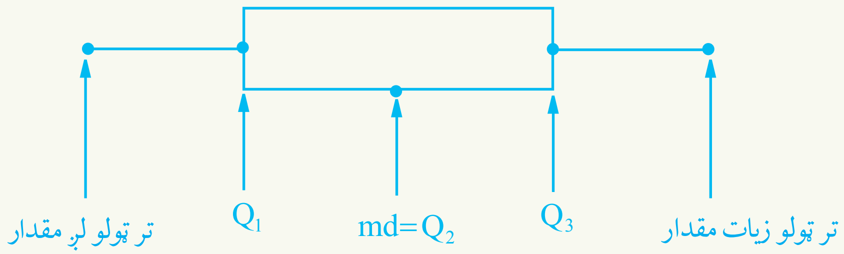
- ميانه يې پيدا کړئ.
- هغه عددونه وليکې چې د ميانې تر مخې نيمايي کې پراته دي.
- ددې عددونو لپاره ميانه پيدا کړئ.
- هغه عددونه وليکئ چې د ميانې په وروسته نيمايي کې پراته دي.
- ددې عددونو لپاره ميانه پيدا کړئ.
- دويمه ربع (څلورمه) يا Q_2 کوم عدد دی؟

صندوقچه يي يا جعبه يي ګراف: دا يو داسې تصويري ګراف دی چې د ډيټا (Data) تيت والی د نورو ګرافونو په نسبت ښه روښانه کوي، د اګراف د لاندېنيو اندازو پر بنياد د ډيټا (Data) ګراف ښکاره کوي.

الف) تر ټولو کوچنی ډيټا ب) لومړنی ربع (څلورمه) ج) ميانه

د) دريمه ربع هـ) تر ټولو لويه ډيټا

صندوقچه يي ګراف د ربعو او له زيات نه زيات او کم تر کمه ډيټا (Data) ښودونکی دی.



کولای شو د صندوقچه يي ګراف د رسمولو پړاوونه په لاندې ډول وليکو:

الف) تر ټولو کوچنی ډيټا پيدا کړئ. ب) تر ټولو لويه ډيټا پيدا کړئ

ج) ميانه پيدا کړئ د) لومړی ربع پيدا کړئ

هـ) دريمه ربع پيدا کړئ و) ګراف رسم کړئ.

مثال: که په يو ښار کې د 15 ورځو په موده کې د ترافيکي پيښو شمېر په لاندې ډول راکړل شوي وي، صندوقچه يي ګراف يې رسم کړئ.

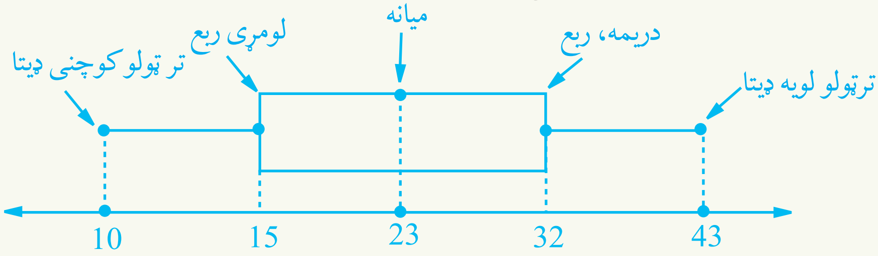
34	16	27	14	23	15	10	12
19	31	25	18	32	43	41	

حل: پورتنی ډيټا په ترتيب ليکو.

10 12 14 15 16 18 19 23 25 27 31 32 34 41 43

نو: تر ټولو کوچنی ډيټا = 10 تر ټولو لويه ډيټا= 43

ميانه = 23 لومړی ربع = $Q_1 = 15$ دريمه ربعه = $Q_3 = 32$



پورتنی ګراف صندوقچه يي ګراف دی چې 50% ډيټا دصندوق په داخل کې (د لومړی، دريمې او ربعې ترمنځ) پرتې دي، 25% يې 10 او 15 ترمنځ او 25% ډيټا د 32 او 43 ترمنځ پرته ده.

د نارمل منحني د مرکزي ټاکوونکو پرتله کول

آیا کولای شو چې د نارمل منحني په مرسته مرکزي ټاکوونکی پلاس راوړو؟

$$\text{mod} = ?$$

$$\text{med} = ?$$

$$\bar{x} = ?$$

لاندې کوم منحني چې وينئ، په احصائيه کې يوله مشهورو منحني گانو څخه دی، کولای شو چې زياتې طبيعي پيښې ددې منحني په مرسته وښايو. نارمل منحني يو متناظره منحني دی چې د يوه زنگ په شان شکل لري.

- آيا د اوسط، مياني او موډ د مرکزي ټاکوونکو ځايونه په دې منحني کې ښودلای شئ؟

فعاليت

- که په يوه ټولگي کې ټول زده کوونکي ښې نمرې واخلي:
- آيا څه فکر کوئ چې ددوی د نمرو اوسط هم ښه دی؟
- آيا د اوسط لوړوالی د ټولگي د تعليمي وضعي پر ښه والي دلالت کوي؟
- ددې لپاره چې د ټولگي وضع ښه ارزيابي کړی، نيم ټولگی بايد ښې نمرې واخلي.
- هغه کومه نمره ده چې د نيمايي ټولگي د زده کوونکو نمرې له هغې زياتې وي؟

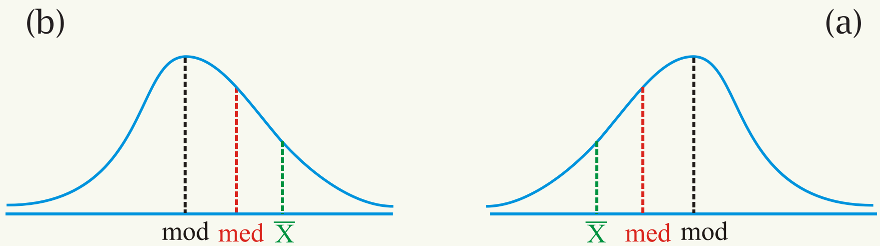
• که میانه له اوسط څخه ډېره کوچنۍ وي، له دې څخه څه شی په لاس راځي؟

• که میانه له اوسط څخه ډېره لویه وي، له دې څخه څه شی په لاس راځي؟

د پورتني فعالیت او د منحنی له متناظر والي څخه نتیجه په لاس راځي چې د میاني او اوسط ځای په نارمل منحنی کې یو دی او څرنګه چې نارمل منحنی اعظمي نقطه لري، نو له همدې سببه د موډ ځای هم له اوسط او میاني سره مساوي دی یعني:

$$\overline{X} = \text{mod} = \text{md}$$

که نارمل منحني، متناظره نه وي، په دې حالت کې لرو چې:



$\text{mod} < med < \overline{x}$ (b)　　$\overline{x} < med < \text{mod}$ (a)

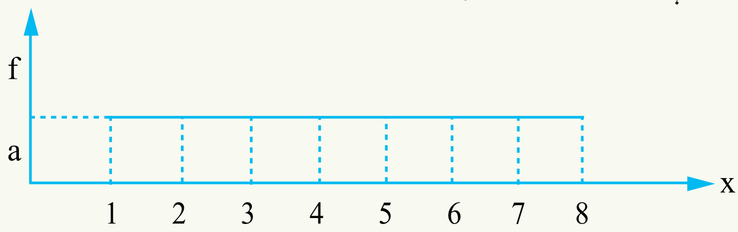
- که چېرې اوسط او میانه سره مساوي وي، له اوسط او میاني څخه تر مخه او له اوسط او میاني څخه وروسته ډیټاګانې سره مساوي دي.

-که اوسط د میاني کیڼې خوا ته پروت وي، د هغو ډیټا شمېر چې د اوسط ښې خواته پرتې دي، د هغو ډیټا (Data) له شمېر څخه چې د اوسط کیڼې خواته پرتې دي، زیات دی، لکه: د a به شکل کې.

-که اوسط د میاني ښې خواته پروت وي، د هغه ډیټا (Data) شمېر چې د اوسط ښې خواته پرتې دي، د هغه ډیټاوو (Data) له شمېر څخه چې د اوسط کیڼې خوا ته پرتې دي، لږ دي.

لکه د b به شکل کې

مثال: په لاندې ګراف کې اوسط او میانه پیدا کړئ.



حل:

= میانه

$$\text{med} = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

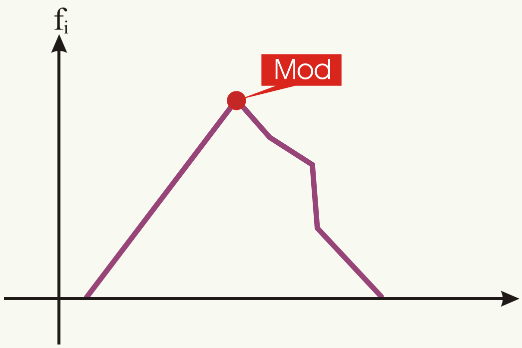
= اوسط

$$\bar{x} = \frac{a\cdot 1 + a\cdot 2 + a\cdot 3 + a\cdot 4 + a\cdot 5 + a\cdot 6 + a\cdot 7 + a\cdot 8}{a+a+a+a+a+a+a+a}$$

$$\bar{x} = \frac{36a}{8a} = 4.5$$

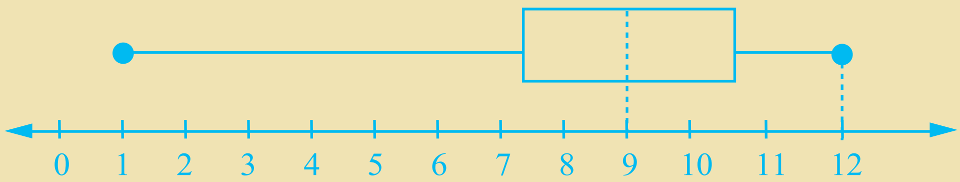
مثال: په لاندې ګراف کې د موډ تقریبي قیمت پرته له محاسبې په ګوته کړئ.

حل:



پوښتني

1- دلاندې صندوقچه يې ګراف په نظر کې نيولو سره لاندې اړوندو پوښتنو ته ځوابونه ورکړئ.



• په پورتني ګراف کې ميانه څومره ده؟

• په دې ډيټا کې لومړنی، ربع د 8 عدد دی، دا عدد، څه شی ښيي؟

• دريمه ربع څو ده؟ دا عدد، د څه شي ښودونکی ده؟

• دا چې ميانه د صندوق کيڼې خواته ده، د څه شي ښکارندويه دی؟

• داچې د کيڼې خوا د عددونو شمېر نظر ښې خوا ته زيات دی دا زياتوالی د څه ښکاره کوونکی دی؟

2- د يوه هېواد د فوټبال ملي ټيم د لوبغاړو عمرونه په لاندې ډول دي.

25	24	26	19	31	18	23	22	25	26
25	27	23	29	25	25	33	31	26	

د لاندې نتيجو څخه کومه يوه سمه ده؟

• د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه يې له اوسط څخه لوړ وي، ډېر دي.

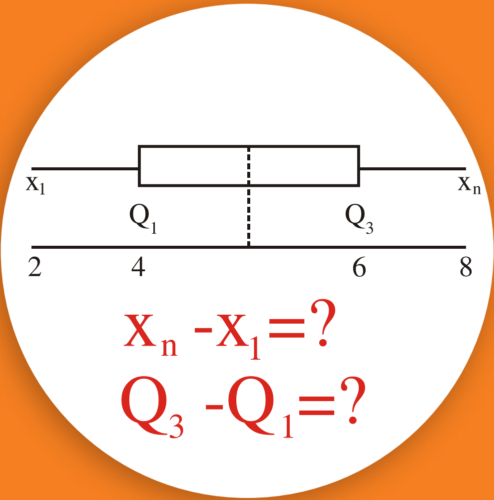
• د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه يې له ميانې څخه لوړ وي، ډېر دي.

• د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه يې له اوسط څخه ښکته وي، ډېر دي.

• د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه يې له اوسط څخه ډېر وي د هغه لوبغاړو له شمېر سره مساوي دی چې عمرونه يې له اوسط څخه لږ دي.

ربعي انحراف

که د یوې ټولنې د احصائیوي تغیراتو لمن لویه وي، آیا فکر کوئ چې د ډیټا د تحول ساحه به له ټولنې څخه نامناسبه پایله وړاندې کړي؟



فعالیت

له یو موزیم څخه د لیدونکو شمیر په 12 ورځو کې په لاندې ډول دی.

0 1 2 8 7 6 5 9 10 6 15 11

- ددې ډیټا (Data) د تحول ساحه پلاس راوړئ.
- په عمومي ډول پورتنی ډیټاوې د کومو دوو عددونو ترمنځ تیت شوي دي؟
- یو په خلورمه برخه ډیټا له پورته اوښکته خوا څخه حذف کړئ او بیا د پاتې ډیټا (Data) د تحول ساحه پیدا کړئ.
- دا د تحول دوه ساحې چې په لاس راغلي دي، یو له بله سره یې پرتله کړئ، کومه یو ه یې ډېر تیت والي ښیي؟
- په ځینو وختونو کې د تحول ساحه د دوو ډېرو کوچنیو او یا ډېرو لویو مقدارونو له سببه، نامناسبه تعبیرونه له ټولنې څخه موږ ته په لاس راکوي.

نو له دې امله د نورو ټاکونکو څخه چې د ربعو د انحراف په نامه یادېږي، ګټه اخیستل کېږي، تر څو د ټولنې د تحول ساحه په ښه ډول وټاکي.

که Q_1 او Q_3 په ترتیب سره د ډیټا د سټ، لومړی ربع او دریمه ربع وي، نو د ربعو انحراف په (Q) سره ښودل کېږي او په لاندې ډول تعریف شوی دی.

$$Q = Q_3 - Q_1$$

ربعي انحراف یو له هغو ټاکونکو څخه دی چې د ډیټا (Data) تیت والي ښکاره کوي. داسې چې د لومړي او دریمې ربعې له تعریف څخه پوهېږو چې 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په فاصله کې پرته ده. په هره اندازه چې دا فاصله لږه وي، ډیټا سره نژدې دي، یا په بل عبارت د هغوی

تيت والې لږ دی.

ځينې وختونه د ربعو (څلورمو) انحراف د $Q=\frac{Q_3-Q_1}{2}$ په شکل تعريفوي او دې ته د ربعو نيمايي لمن وايي.

مثال: دلاندې عددونو د ربعو (څلورمو) انحراف پيدا کړئ.

36 35 29 30 31 25 24 23 22 22 20

حل: لومړی عددونه په صعودي ډول ترتيب کوو او بيا ورته يوه شمېره ټاکو:

20	22	22	23	24	25	29	30	31	35	36
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$$C_{Q_n}=\frac{P\cdot n}{4}+\frac{1}{2}$$

$$C_{Q_3}=\frac{3\cdot 11}{4}+\frac{1}{2}=\frac{33}{4}+\frac{1}{2}=\frac{33+2}{4}=\frac{35}{4}=8.75$$

نوله دې ځايه:

$$Q_3=30.75$$

همدارنگه:

$$C_{Q_1}=\frac{1\cdot 11}{4}+\frac{1}{2}=\frac{11}{4}+\frac{1}{2}=\frac{11+2}{4}=\frac{13}{4}=3.25$$

نوله دې ځايه:

$$Q_1=22.25$$

د لومړني او دريمې، ربعې قيمتونه

په ترتيب سره 22.25 او 30.75 دي نو:

$$Q=Q_3-Q_1=30.75-22.25=8.5$$

پوښتنې

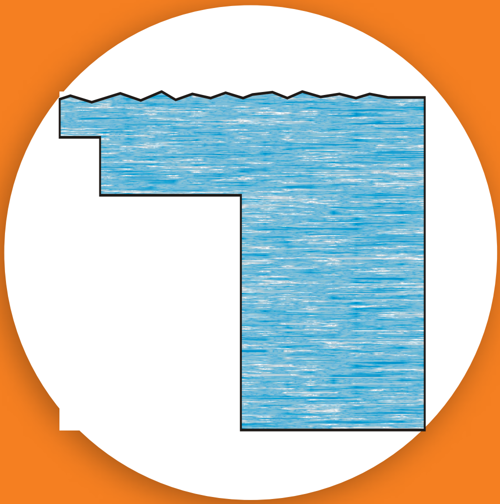
1 - د لاندې ډېټا د تحول ساحه، د ربعو (څلورمو) انحراف او موډ پيدا کړئ او ووایاست چې د ډېټا گڼوالی په کومه ساحه کې ډېر دی.

5 11 12 14 15 15 16 17 30

2 - د لاندې ډېټا د تحول ساحه او د څلورمو انحراف پيدا او د لومړۍ پوښتنې د تحول د ساحې او د څلورومو د انحراف سره يې پرتله يې کړئ.

27 24 21 29 28 26 23 22

واريانس (variance)



که ستاسو لامبو ښه زده نه وي او وغواړئ چې په داسې ډنډ کې ولامبئ چې ژور والی یې په ټولو برخو کې یو شان نه وي. ددې لپاره چې په ډاډه زړه ولامبئ، کوم معلومات باید ولرئ؟

فعالیت

که د لمبا په يو ډنډ کې د يوځای ژوروالی 1.5 متره او دبل ځای ژوروالی يې 2.5 متره وي.

- ددې ډنډ د دواړوو ځايونو د ژوروالي اوسط پيدا کړئ.
- ددې دوو ډيتاوو د انحرافونو مربع له حسابي اوسط څخه پيدا کړئ.
- ددې دوو ډيتاوو د انحرافو د مربعګانو مجموعه پيدا کړئ.
- د پورتنيو ډيتاوو (Data) مجموعه د مجموعې د غړو پر شمېر و وېشئ.

د $x_1, x_2, \dots, x_n$ ډيټا د واريانس د پيدا کولو لپاره لاندې پړاوونه په نظر کې ونيسئ.

- د ډيټا اوسط پيدا کړئ يعنې:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

- د انحرافونو د مربعګانو مجموعه يعنې:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2$$

په لاس راوړئ.

-پورتنی مجموعه د مجموعې د غړو پر شمېر (n) و وېشئ او په s^2 يې وښيي:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

چې دلته S^2 د واریانس په نامه یادېږي. واریانس برابر دی د انحرافونو د مربع اوسط له اوسط څخه.

پاملرنه: ځینې وختونه واریانس د پیدا کولو لپاره له دې لاندې فورمول څخه هم ګټه اخلي.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{x}^2$$

ثبوت: پورتنې فورمول کولای شو، په لاندې ډول لاس ته راوړو.

پوهېږو چې:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\overline{x}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} 2x_i\overline{x}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{x}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\overline{x}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{n\overline{x}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\overline{x}\cdot\overline{x} + \overline{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{x}^2$$

مثال: د لاندې ډیټا (Data) وریانس د دواړو فورمولونو په مرسته پیدا کړئ.

1 5 6 7 9

الف: د $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(xi - \overline{x})^2}{5}$ له فورمول څخه څرنګه چې $i = 1,2,3,4,5$

$$\overline{x} = \frac{1+5+6+7+9}{5} = 5.6$$

$$S^2 = \frac{(1-5.6)^2 + (5-5.6)^2 + (6-5.6)^2 + (7-5.6)^2 + (9-5.6)^2}{5}$$

$$=\frac{(-4.6)^2+(-0.6)^2+(0.4)^2+(1.4)^2+(3.4)^2}{5}$$

$$=\frac{21.16+0.36+0.16+1.96+11.56}{5}=\frac{35.2}{5}=7.04$$

ب: له دې فورمول $S^2=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i^2}{5}-\bar{x}^2$ څخه هم کولی شو چې همدا قیمت په لاس راوړو

$$S^2=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2}{5}-\bar{x}^2=\frac{192}{5}-(5.6)^2$$

$$=38.4-31.36=7.04$$

یادونه: که ډیټا په ګروپونو (کلاسوونو) کې ترتیب شوي وي او د کلاسونو مرکزونه $x_1, x_2, .., x_n$ او $f_1, f_2, ..., f_n$ فریکونسي هم راکړل شوي وي. په دې حالت کې د واریانس د پیدا کولو لپاره له لاندې فورمول څخه کار واخلو:

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}f_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-\bar{x})^2}{N}$$

داسې چې $N=\sum_{i=1}^{n}f_i$ دی.

د واریانس د واحد ټاکل مشکل دي. په عمومي ډول په عمل کې مطلقه قیمت یې نیول کېږي، ځینې وخت د متحول د واحد مربع د واریانس د واحد په حیث ګڼل کېږي.

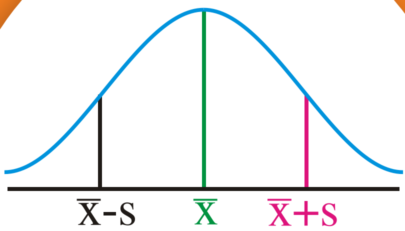
پوښتنې

د هغو ساعتونو شمېر چې زده کوونکو په یوه اونۍ کې د لوبو کولو لپاره ټاکلي دي، په لاندې ډول راکړل شوي دي.

3 2 1 4 3 2 2

ددې ډیټا (Data) وریانس پیدا کړئ.

معیاري انحراف



که S دوریانس جذر $\bar{x}$ دډیټا اوسط وي
مخامخ شکل کوم ډول ټاکونکی توضیح کوي؟

فعالیت

که S^2 د $x_1, x_2, ..., x_n$ ډیټا واریانس وي. آیا څه فکر کوئ چې د S^2 او S واحدونه سره څه توپیر لري؟ فرض کړئ چې په یوه اونۍ کې یوې کارخانې ته د توکو د فرمایشونو د تسلیمۍ وخت له ځینو ټاکونکو سره، لکه: انحراف، د انحراف مطلقه قیمت د انحرافو مربع په لاندې جدول کې راکړل شوي وي، څرنګه چې:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{n} = \frac{8+9+6+4+8}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

ورکړې وخت په ورځ x_i	$\bar{x}$	انحراف $x_i - \bar{x}$	دانحراف مطلقه قیمت $\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	د انحرافونو مربع $(x_i - \bar{x})^2$
8	7	1	1	1
9	7	2	2	4
6	7	-1	1	1
4	7	-3	3	9
8	7	1	1	1

- د ډېټا (جامو) د ورکړې د وخت اوسط پیدا کړئ.
- د انحرافو د مطلقه قیمت اوسط یا په لنډ ډول د انحراف اوسط (AD) پیدا کړئ.
- د توکو د ورکړې وخت واریانس پیدا کړئ.
- د واریانس مربع جذر محاسبه کړئ.
- د واریانس د مربع جذر واحد د واریانس له واحد سره پرتله کړئ.

د واریانس له فورمول څخه مو زده کړل چې په توان ورلو سره نه یوازې داچې د واریانس اندازه کولو مقیاس له شکک سره مخامخ کوي، بلکې انحرافونه هم لوی ښیي.

ددې لپاره چې دا ستونزې له مینځه یوسو، په کار ده چې د وریانس مربع جذر په لاس راوړو.

د واریانس جذر د ډېټا (Data) د تیت والي، یو بل ټاکوونکی د معیاري انحراف یا مطلق تیت والي په نوم را پیژني.

معیاری انحراف چې د S په سمبول ښودل کېږي، د واریانس له مربع جذر سره مساوي دی.

په دې معنا:

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}}{n}-\bar{x}^2}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2}$$

د معیاری انحراف یا د مطلق تیت والي واحد هم هغه د متحول واحد دی.

پورتنی رابطه په لاندې ډول ثبوت کېږي:

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^{2}-2\bar{x}x_i+\bar{x}^2)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}-2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}-2n\bar{x}^{2}+n\bar{x}^{2}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}-n\bar{x}^{2}\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}-n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}-\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}{n}\right)$$

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2\Rightarrow S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2}$$

مثال: د 5 ناروغانو د بدن د حرارت درجې په لاندې ډول راکړل شوي دي.

38 39 39 40 41

معياري انحراف يې پيدا کړئ

حل:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\frac{38+39+39+40+41}{5}=\frac{197}{5}=39.4$$

$$S^2=\frac{(38-39.4)^2+(39-39.4)^2+(39-39.4)^2+(40-39.4)^2+(41-39.4)^2}{5}$$

$$S^2=\frac{(-1.4)^2+(-0.4)^2+(-0.4)^2+(0.6)^2+(1.6)^2}{5}$$

$$S^2=\frac{1.96+0.16+0.16+0.36+2.56}{5}=\frac{5.2}{5}=1.04$$

$$S=\sqrt{1.04}=1.01980$$

پاملرنه: د فريکونسيو له جدول څخه، معياري انحراف په تقريبي ډول په لاندې ډول په لاس راځي:

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-(\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}f_i}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}f_ix_i^2}{\sum_{i=1}^{n}f_i}-\bar{x}^2}$$

چې $\bar{x}$ د ډيټا، اوسط، x_i د کلاس مرکز او f_i د کلاس فريکونسي ښيي.

پوښتنې

د څلورو ټلويزوني سټيشنونو د ښوونې او روزنې د پروګرامونو د خپرولو د ساعتونو شمېر په لاندې ډول راکړل شوی دی، د ډيټا معياري انحراف پيدا کړئ.

1 3 4 5

• **د فريکونسي څو ضلعي ګراف**: د هغو مرتبو جوړو نقطې چې عرض يې د کلاس مرکز او اوړدوالى يې د هماغه کلاس له فريکونسي سره مساوي دى، يوه له بلې سره ونښلوو، د فريکونسي څو ضلعي ګراف په لاس راځي، د فريکونسي په څو ضلعي ګراف کې دوې نورې اختياري نقطې د صفر په فريکونسي د کلاسونو (ګروپونو) په لومړۍ او اخيرنى برخه کې ډېروو، تر څو د فريکونسي څو ضلعي ګراف له محور سره ونښلوي.

• **د ساقې او پاڼې ګراف**: د ساقې او پاڼې د ګراف د رسمولو لپاره له عددونو څخه ګټه اخيستل کېږي. احصائيوى ډيتا د عددونو په شکل راوړو، بيا له دې عددونو څخه د ساقې او پاڼې ګراف رسموو. دا ډول ګراف د هغو ډيتا (Data) لپاره چې د رقمونو د شمېر له مخې تر ټولو لوى او کوچنى رقم تر منځ توپير لږ وي، مناسب دى.

• **ربعي**: هغه عدد چې مرتبه جامعه په دوو مساوى برخو ووېشي، د ميانې په نوم يادېږي. اوس هغه عددونه په نظر کې ونيسئ چې مرتبه جامعه په څلورو مساوي برخو وېشي، دا عددونه په Q_2, Q_1 او Q_3 سره ښودل کېږي، دې عددونو ته په ترتيب سره لومړى ربع، دويمه ربع او د دريمه ربع وايي. ښکاره ده چې Q_2 ميانه ده.

• **صندوقچه يې يا جعبه يې ګراف**: له دې ګراف څخه د هغې ډيتا (Data) لپاره چې سره نژدې دي يا هغه ډيتاوې چې د اوسط پر شاوخوا راټولې شوي دي او يا هم هغه ډيتا چې تر ټولو لويو يا تر ټولو کوچنيو ډيټاګانو پرشاوخوا راټولې شوي وي، ګټه اخيستل کېږي، داګراف يو تصويري ګراف دى چې تر ټولو لويې ډيتا، تر ټولو کوچنى ډيتا، ميانې، لومړى ربعې او دريمې ربعې په اساس ښکاره کوي.

• **د نارمل منحني په بنياد د مرکزي ټاکونکو پرتله کول**: څه وخت چې وغواړو مرکزي ټاکونکي (اوسط، ميانه، او موډ) له نارمل منحني څخه په ګټه اخيستنې سره پرتله کړو: په دې حالت کې که نارمل منحني متناظر وي، نو اوسط، ميانه او موډ سره مساوي دي. که نارمل منحني متناظر نه وي، نو مرکزي ټاکونکي نظرخپل موقعيت ته د منحني ښي خوا يا کيڼي خواته قيمتونه اخلي.

• **ربعي انحراف**: که Q_1 او Q_3 په ترتيب سره د ډيتا (Data)لومړى ربع او دريمه ربع وي، کولاى شوو چې د څلورمو (ربعي) انحراف (Q) په لاندې ډول وليکو

$$Q = Q_3 - Q_1$$

له پورتني تعريف څخه ښکاري چې 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په فاصله کې پرته ده. په هره اندازه

چې دا فاصله لږه وي، ډیټاګڼې دي او د ډیټا تیت والی لږ دی.

• **واریانس**: د تیت والی ټاکونکي هغه مقدارونه دي چې د ډیټا (Data) د تیت والی حالت نسبت یوبل ته او نسبت یې اوسط ته ټاکي.

واریانس د ټیټ والي له ټاکونکو څخه یو مهم ټاکونکی دی چې په S^2 سره ښودل کیږي او له لاندې رابطې څخه په لاس راځي:

$$S^2 = \frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}$$

د واریانس پیدا کول د فریکونسي په جدول کې له دې فورمول څخه په لاس راځي:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

(x_i دکلاس مرکز دی)

• **معیاري انحراف**: د واریانس مربع جذر په S ښيي چې معیاري انحراف ورته وايي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}}$$

د معیاري انحراف پیدا کول د فریکونسي له جدول څخه د لاندې فورمول څخه په لاس راځي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

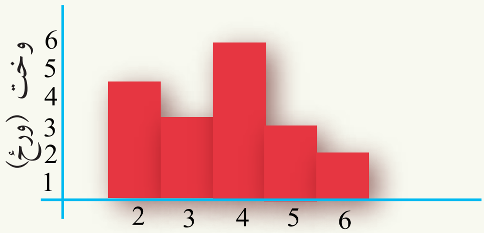
(x_i دکلاس مرکز دی)

د څپرکي پوښتنې

1 - لاندې ګراف د باد سرعت په 19 ورځو کې ښکاره کوي، په ګراف کې د راکړل شوو اطلاعاتو پر بنسټ د باد سرعت لپاره د فریکونسي څو ضلعي ګراف رسم کړئ.

که چیرې یوې کشتۍ ته د حرکت لپاره لږ تر لږه په یوه ساعت کې 5 کیلو متره د باد سرعت ته اړتیا وي، نو څو ورځې د کشتۍ د حرکت کولو لپاره مناسبې دي؟

په دې پوښتنه کې ولې د فریکونسي څو ضلعي ګراف، نظر مستطیلي ګراف ته مناسب دی؟



2 - د فریکونسي څو ضلعي ګراف هغه ګراف دی چې .... په افقي محور او .... د عمودي محور پر مخ ښودل کیږي.

الف) د کلاسونو مرکز، نسبي فریکونسي

ب) نسبي فریکونسي، د کلاسونو مرکز

ج) د کلاسونو حدود، مطلقه فریکونسي

د) د کلاس مرکز، مطلقه فریکونسي

3 - دساقې او پاڼې ګراف راکړل شوی دی:

- له دې ګراف څخه په لاس راغلې ډیټا ولیکئ.

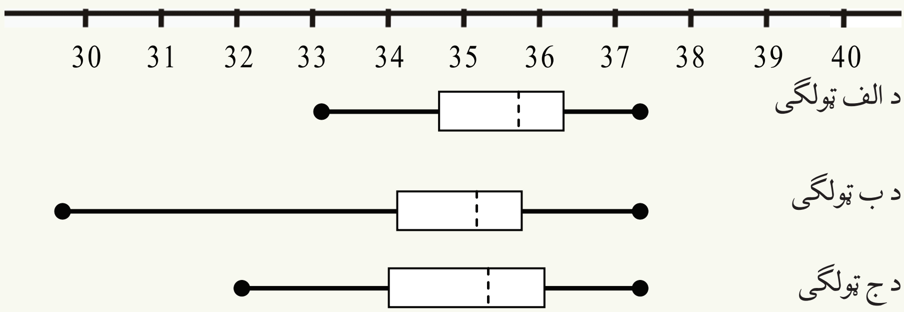
ساقه	پاڼې				
1	0	3	3	4	
2	0	2	4	8	8
3	2				

4 - کوم ګراف ته د 90° په اندازه (د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف لوري ته) دوران ورکړو، تر څو میله یي ګراف لاس ته راشي.

الف) د ساقې او پاڼې ګراف   ب) مستطيلي ګراف

ج) د فريکونسي د څو ضلعي ګراف   د) دايروی ګراف

5: لاندې ګراف د الف،ب او ج د دريو ټولګيو د رياضي ازموينې نمرې ښکاره کوي، ګراف ته په پاملرنې سره لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- د کوم ټولګي د تحول ساحه زياته ده؟
- د کوم ټولګي د نمرو ميانه تر ټولو زياته ده؟ او د کوم ټولګي د نمرو ميانه تر ټولو لږه ده؟
- د کوم ټولګي د نمرو تيت والی تر ټولو ډېر دی.
- ددې دريو ټولګيو د ازموينې نمرې له کمزورې څخه د قوي په لور ترتيب کړئ.

6 : په ګراف کې د a مقدار عبارت دی له:

الف) ميانه   ب) اوسط   ج) دريمه ربع   د) موډ

7: د غذايي موادو د توليد دوه فابريکې د A او B په نامه، د 48 گرامو په قطيو کې بسکيت خرڅوي.

• په تصادفي ډول د دواړو فابريکو د بسکيت له قطيو څخه 5 قطي ټاکل شوي دي او په پوره غور سره يې وزنونه معلوم شوي دي چې په لاندې ډول دي.

A :	48.08	48.32	47.96	47.84	47.96
B :	49.16	48.84	48.88	49.08	49

• په قطيو کې کومه فابريکه زيات بسکيت خرڅوي؟ د پوښتنې د حل لپاره له کوم ټاکونکي څخه استفاده کوی؟

• د بسکيت په وېشلو کې کومې فابريکې يو شان عمل کړی دی؟

8: که د ډېټا د تحول ساحه صفر وي. د ډېټا په برخه کې څه نتيجه اخلئ؟

9 : د هغه ساعتونو شمېر چې زده کوونکو په يوه اونی کې د لوبو لپاره ټاکلې دي، په لاندې ډول راکړل شوي دي.

1 5 7 9

ددې ډېټا (Data) ورايانس پيدا کړئ.

10: په لاندې جدول کې واريانس پيدا کړئ.

x_i	25	35	45
f_i	10	25	15

نهم څپرکی

د رياضي منطق





د شهودي درک استدلال:

پخوا تر ډېر و پیړیو پورې خلکو فکر کاوه چې ځمکه هواره ده او ستورې د ځمکې پر شاوخوا څرخیږي.
آیا پوهیږې چې ځمکه کروي ده؟
آیا لمر دځمکې پر شاوخوا او که ځمکه د لمر پرشاوخوا څرخیږي؟

تعریف: هغه طبیعي یا حسي پوهه چې دهغې په مرسته دیوې موضوع سموالی یا حقیقت او یا یو مفهوم پر ته له استدلاله قبلوو، له شهودی درک څخه عبارت دی چې کیدلی شي، دوخت په مختلفو مرحلو کې یوله بله سره توپیر ولري.

فعالیت

د لاندې شکل په نظر کې نیولو سره د مستقیم خط پر مخ د A او B دوې نقطې په پام کې ونیسئ.



یو سرې غواړي چې ددې مستقیم خط پر مخ د A له نقطې څخه د B نقطې ته لاړشي چې د $\overline{AB}$ د قطعه خط منځنی نقطه A_1 کې توقف وکړي او بل وار چې د A_1 نقطې ته رسیدلی دی، ددې لپاره چې د B نقطې ته ورسیږي، بیاد A_2 په نقطه (د $\overline{A_1B}$ د قطعه خط دتنصیف نقطه) کې توقف وکړي، که په همدې ډول دوام ورکړي، نو لاندې پوښتنو ته ځوابونه ورکړئ:

- آیا په پورته ډول چې د خط پر مخ د هرو دوو نقطو په منځنی نقطه کې توقف وکړي، پای لري؟
- که په همدې ډول تر پایه دوام ورکړي، دا سړی به د B نقطې ته ورسیږي؟
- که دا سړی توقف و نه کړي او یا له لارې بیرته راونه ګرځي، نو نه یوازې چې د B نقطې ته به ورسیږي، بلکې ترې تېر به هم شي. په دې اساس ددې مسلئې د واقعیت او ستاسو د شهودي درک ترمنځ څه توپیر شته؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې نتیجه لاس ته راځي:

نتیجه: د شهودي درک نتیجه هر وخت صحیح نه وي، خوکېدای شي چې د قضیو دحل لپاره یو ښه بنسټ وي.

له هغه مثال څخه چې په پورتني فعالیت کې مو ترې استفاده وکړه او یاداسې نور مثالونه دا ددې په معنا نه دي چې دشهودي درک استدلال گمراه کوونکی دی، بلکې بر عکس په زیاتو حالتونوکې دشهودي درک استدلال د مسلؤ دحل، د انگیزې د پیداکولو او د نورو سوالونو د طرح کولو سبب گرځي.

لومړی مثال: د شهودي درک په استدلال سره په اسانی سره حکم کولای شو چې دوه موازي خطونه یو بل نه قطع کوي.

څرنگه چې ددې مسلې په قبلولو کې استدلال په کار ورل شوی نه دی، په واقعیت یو احساس دی چې پر اساس یې داحکم منل کېږي، نو دا ډول نتیجه اخیستنه دشهودي درک په نامه یادوو.

دویم مثال: که یوه نقطه د داسې دایرې د باندې پرته وي چې قطر یې 4 واحده وي. ددې نقطې د فاصلې د مطالعه کولو لپاره چې له 2 واحده څخه زیاته ده، نه شو ویلای چې دا استدلال یو شهودي درک دی، ځکه دمسئلې د وضاحت لپاره لازمه ده چې استدلال وکړو. څرنگه چې د دایرې د مرکز فاصله له محیط څخه 2 واحد ده. نقطه د دایرې د باندې واقع ده، نوله دې امله د دایرې له مرکز څخه د نقطې فاصله د 2 واحده څخه لویه ده. یعنې پرته له استدلال څخه د طبیعي پوهې او یا غریزه یې احساس په واسطه نه شوکولای، مسئله درک او صحت یې قبول کړو.

پوښتنې

1- د دوو نقطو ترمنځ لنډه فاصله له یوه مستقیم خط څخه عبارت ده، آیا ددې مسئلې درک کول یو شهودي درک دی؟ څرنگه استدلال کوئ؟

2- له لاندې حکمونو څخه کوم یو یې د شهودي استدلال په طریقه د درک وړدی؟

a- دیوې متوازي الاضلاع مقابلې زاویې سره مساوي دي.

b- د لوزي (معین) قطرونه یو پر بل عمود او یوبل نیمایي کوي.

c- په یوه قایم الزاویه مثلث کې و تر، له هرو دوو ضلعو څخه لوی دی.

تمثيلي يا گماني استدلال



ووايه زما په لاسونو کې څه شی دی؟ تقريباً گرد دی، رنگ يې سپين دی او دسپينو په منځ کې يو ژيړ شی دی؟

د منطق يوه ښوونکي غوښتل چې دخپل يوه زده کوونکي قياسي استدلال وازمايي، خپل مخ يې هغه ته ورواړوه او ورته ويې ويل:

پوهېږئ چې گمان او يا تمثيل حقيقت ته د رسيدو پل دی. د لوست په جريان کې مو زده کړل چې تمثيلي استدلال موږ حقيقت ته نژدې کوي، ليکن هر وخت سوچه حقيقت نه دی.

ښوونکي په داسې حال کې چې په خپلو لاسونوکې يې د چرگې هگۍ پټه کړې وه، له زده کوونکي وپوښتل: ووايه زما په لاسونو کې څه شی دی؟ تقريباً گرد دی، رنگ يې سپين دی او دسپينو په منځ کې يو ژيړ شی دی.

زده کوونکی چې په همدې وخت کې له زراعتی فارم نه راغلی و، له ژور فکر کولو وروسته يې ښوونکي ته مخ ورواړوه او ويې ويل:

استاده فکر کوم چې دسپين شوي شلغم(ټيپر) په منځ کې گازره ده.

تعريف

د دوو پېښو ترمنځ د ورته والي پيداکول او دهغوی په باره کې د يوشان نتيجې اخيستلوته تمثيلي يا قياسي (گماني) استدلال وايي.

فعاليت

يوه ښوونکي يو شوخ زده کوونکی چې لوست يې اخلالوه، له ټولگي څخه وويست. دټولگي د باندې يې د خپل ټولگي بل زده کوونکی وليده چې هغه هم له ټولگي څخه د باندې و تلی دی. دپورتني تعريف په نظر کې نيولو سره له لاندې اړيکو څخه کوم يو يې يو تمثيلي يا قياسي استدلال دی.

- دويم زده کوونکی د لوست په وخت کې تفريح کوي.

- دویم زده کوونکي هم شوخي کړې ده.
- ناروغه دی، نه غواړي چې په ټولګی کې واوسي.

له تعریف او د زده کوونکو له فعالیت څخه لاندې نتیجه په لاس راځي:

نتیجه: قیاس یا تمثیل په حقیقت کې د مختلفو مفهومونو په منځ کې د ورته والي پیداکول دي. له دې سببه تمثیلونه کېدای شي، د ډېرو مفهومونو یا دریاضي د قضیو د درک کولو لپاره شهودي زمینه پیداکړي. تمثیلي استدلال د ثبوت په حیث نه شمارل کېږي، بلکې د ثبوت لپاره زمینه برابروي.

لومړی مثال: په عامه ژ به(مارخوړلی له برګ پړي څخه ډارېږي) دا یو قیاسي استدلال دی، څکه چې برګ پړی له مار سره پر تله شوی دی او د هغوی په منځ کې ورته والی لیدل شوی دی.

دویم مثال: له تمثیلي استدلال څخه په ګټه،ددې حقیقت درکول چې د دوو منفي عددونو حاصل ضربٍ مثبت عدد او د یو منفي او یو مثبت عدد حاصل ضرب منفي عدد دی، داسې په لاس راوړو: مثلاً ددې حقیقت د درک کولو لپاره چې که چېرې د یوه زده کوونکي لیاقت د (+) په علامه او نا لایق والی د (-) په علامې سره په پام کې ونیسو او ددې دواړو عملونو د حاصل د(دی) لپاره (+) او (نه دی) لپاره (-) په پام کې ونیسو، له تمثیل او یا قیاس څخه ګټه اخلو او که دوی سره ترکیب کړو په نتیجه کې لروچې:

لایق دی = مثبت ← (+) (+) = + ،   لایق نه دی = منفي ← (+) (-) = - ،

نالایق دی = منفي ← (-) (+) = - ،   نالایق نه دی = مثبت ← (-) (-) = + ،

پوښتني

1 - دا بیان چې(بختور کال د هغه کال له پسرلي نه معلومیږي.) په لاندې کوم استدلال باندې دلالت کوي.

a- شهودي درک استدلال.

b- قیاسي استدلال.   c- هیڅ ډول استدلال په کې نشته دی.

2- د قیاسي استدلال په مرسته په کوم مثلث کې د فیثاغورث د قضیې په اساس لاندې نتیجه ثبوت کېدلای شي:

$$\sin^2 \propto + \cos^2 \propto = 1$$

استقرايي استدلال:



يو زده کوونکی په لومړنی صنفي ازموینه کې 100 نمرې اخلي او په دويم او دريم صنفي ازموينو کې هم 100 نمرې اخلي.
په اخرنۍ ازموينه کې څه نتيجه اخيستلای شئ چې دا زده کوونکی به څونمرې واخلي؟

فعالیت

د مسلسلو طاقو طبيعي عددونو د جمعې حاصل په پام کې نيسو، ددې کار لپاره له يو 1 له عدد څخه پيل وکړئ او تش ځايونه ډک کړئ.

$1+3= \square = (\quad)^2$

$1+3+5= \square = (\quad)^2$

$1+3+5+7= \square = (\quad)^2$

$1+3+5+7+9= \square = (\quad)^2$

پورتنيو پوښتنو ته په پاملرنې سره ليدل کېږي چې د طاقو طبيعي عددونو د جمعې حاصل د طبيعي عددونو د شمېر له پوره مربع سره مساوي دی.
- آيا کولای شو نتيجه واخلو چې هر وخت د طاقو مسلسلو عددونو د جمعې حاصل ددې عددونو د شمېر له مربع سره مساوي دی؟
- کوښښ وکړئ له n طاقو مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل لپاره فورمول په لاس راوړئ.

ديورتني فعاليت د سرته رسولو په اساس لاندې نتيجه په لاس راځي.

نتيجه: استقرايي استدلال د يو شمېر مشاهدو و پر بنسټ د عمومي نتيجې اخيستنې طريقه ده. په حقيقت کې يوې کوچنۍ نمونې ته په لويه نمونه عموميت ورکول دي.

لومړی مثال: (موټې د خروار نمونه ده) داخبره استقرايي استدلال ته اشاره کوي، ځکه په دې مثال

کې له یوې کوچنۍ نمونې څخه د کل نتیجه اخیستل کېږي، په حقیقت کې له مسئلې څخه د یوشمېر مشاهد و پر بنسټ نتیجه اخیستل شوي ده، نو له استقرايي استدلال څخه کار اخېستل شوی دی.

دویم مثال: یو زده کوونکی په اتفاقي ډول په څومرحلو کې درې مسلسل عددونه سره ضرب کړل او ویې لیدل چې د ضرب حاصل د 6 عدد مضرب دی. له دې کار څخه نتیجه اخلي چې (د هر دروو مسلسلو عددونو د ضرب حاصل د 6 عدد مضرب دی)

نوموړې زده کوونکي کوم استدلال کړی دی.

الف: شهودي استدلال ب: قیاسي (گماني) ج: استقرايي استدلال د: هېڅ یو

حل: استقرایی استدلال

پوښتنې

1- هغه طریقه چې د یوه محدوده شمېر ډېټا پر اساس ترینه عمومي نتیجه اخیستل کېږي، څرنگه یو استدلال دی.

الف: قیاسي یا تمثیلي استدلال ب: استقرايي استدلال

ج: د شهودي درک استدلال

2 – د عددونو ترتیب ته په پاملرنې سره لاندې تش ځایونه ډک کړئ:

$1\times8+1=\square$

$12\times8+2=\square$

$123\times8+3=\square$

$1234\times8+4=\square$

3-

a) د دویمې پوښتنې حل ته په پام سره کېدای شي چې د عددونو پورتني ترتیب ته تر بې نهایت پورې دوام ورکړي؟

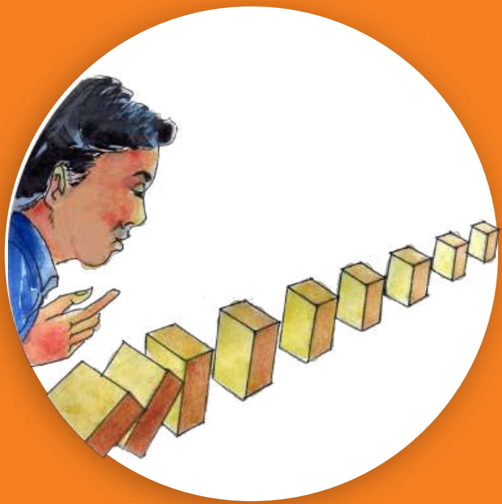
b) د محاسبه کولو پرته او د پورتنیو پوښتنو په پاملرنې سره اټکل کړئ چې کوم عددونه د لاندې پوښتنو په تش ځایونو کې را تلای شي:

$12345\times8+5=\square$

$123456\times8+6=\square$

دریاضي د استقرا استدلال

د دوو مینو لوبه :



آیا تاسوکله د دوو مینو لو به تر سره کړې ده؟

پوهېږئ چې د دوو مینو په لوبه کې د لومړۍ خښتې لوېدل، د دويمې خښتې پرمخ چې یوه دبلې څنگ ته پرته وي، په ترتیب سره لومړنۍ پر دويمه، دويمه پر دريمه... تر پا یه پورې پر مخکه ولوېږي، داد خښتو یو پر بله لوېدل چې د پورته شکل په شان په مساوي فاصلو یو دبل څنگ ته پريوزي، د علاقه مندانو لپاره يو په زړه پورې تصویر ښکاره کوي.

لیدل کېږي چې د k ام خښتې لوېدل د $k+1$ ام د خښتې دلوېدلو سبب گرځي، اوس نو که د خښتو لوېدل له یوې ټاکلې شمېرې څخه پیل شي، له هغې څخه وروسته خښتې يو پر له پسې راولیږي او ټولې خښتې د ځمکې مخ نیسي.

فعالیت

پوهېږئ چې $100=1+8+27+64$ دی، که دا عددونه د مکعبونو د مجموعې په شکل په لاندې ډول ولیکو:

$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$$

- آیا هر وخت د مسلسلو طبیعي عددونو د مکعبونو مجموعه د عددونو د مجموعې له مربع سره مساوي ده؟

- آیا کولای شئ د پورتنۍ پوښتنې د حل لپاره یوه عمومي طریقه ووایاست، د پورتنۍ پوښتنې د ځواب لپاره لاندې جدول ډک کړئ.

د متوالي عددونو شمېر	دمتوالي طبيعي عددونو معکبونه	د معکبونو مجموعه	د عددونو د مجموعې مربع
1	1^3		1^2
2	1^3+2^3		
3	$1^3+2^3+3^3$	36	
4	$1^3+2^3+3^3+4^3$		10^2
n	$1^3+2^3+3^3+...+n^3$		$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

- د $n=1$ ، $n=2$ ، $n=3$ او $n=4$ د طبيعي مسلسلو عددونو د مکعبونو د مجموعې لپاره د $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ فورمول سموالی وازمايئ.

- اوس که د n مسلسلو طبيعي عددونو لپاره پورتنی فورمول قبول کړو يعني که:

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

وي، نو د $n+1$ د مسلسلو طبيعي عددونو لپاره يې ثبوت کړئ يا داچې وښياست:

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

د پورتني فعاليت له سرته رسولو څخه لاندې نتيجه لاس ته راځي.

نتيجه: که چېرې $P(n)$ د n طبيعي عددونو په برخه کې يو حکم راکړل شوی وي، که د $n=1$ لپاره $P(1)$ صحيح وي، په دويم پړ اوکې که د $P(k)$ له سموالي څخه $P(k+1)$ په لاس راشي، نو دا ادعا د $P(n)$ د هر n طبيعي عدد لپاره هم سمه ده.

لومړی مثال: وښياست چې $P(n)=4^{2n}-1$ د هر طبيعي عدد لپاره پر 5 د وېش وړ دی.

حل: د $n=1$ لپاره سمه ده ځکه چې:

$n=1$, $P(1)=4^{2\cdot1}-1=4^2-1=16-1=15$

ليدل کېږي چې $P(1)=15$ پر 5 د وېش وړ دی.

قبلوو چې د k طبيعي عدد لپاره پورتنی ادعا سمه ده يعني: $P(k)=4^{2k}-1$ پر 5 د وېش وړ

دی.

څرنگه چې پر 5 د وېش وړ دی، نو کولای شو په لاندې ډول يې وليکو

$$P(k) = 4^{2k} - 1 = 5r\text{.......................}(*)$$

غواړو وښايو چې د $n = k + 1$ لپاره دا ادعا سمه ده، نو لروچې:

$$n = k + 1 \quad , \quad P(k+1) = 4^{2(k+1)} - 1\text{...........}(**)$$

د $(^*)$ د رابطې دواړه خواوې په 4^2 کې ضربوو.

$$4^2(4^{2k} - 1) = 5r \cdot 4^2$$

$$4^{2k+2} - 4^2 = 5r \cdot 16 \Rightarrow 4^{2(k+1)} - 1 = 15 + 16 \cdot (5r)$$

$$4^{2(k+1)} - 1 = 5(3 + 16r)$$

د پورتني مساوات له ښي خوا $5 \cdot (3 + 16r)$ څخه ښکاري چې د مساوات کينه خوا پر 5 د وېش وړ ده.

نو اخرني مساوات ښکاره کوي چې $P(k+1) = 4^{2(k+1)} - 1$ هم پر 5 دوېش وړ دی، څرنگه چې د $P(k)$ له سموالي څخه د $P(k+1)$ سموالي نتيجه شوه، نو د رياضي د استقرا د اصل په اساس پورتنی ادعا $P(n)$ د هر طبيعي عدد (n) لپاره سمه ده.

يادونه: د رياضي د استقرا په مرسته د رياضي د حکمونو د ثبوتولو لپاره لومړی $P(1)$ په لاس راوړو، بيا $P(k)$ د استقرا د حکم په حيث په پام کې نيسو او په همدې ترتيب له فرضيې څخه حکم ثبوتوو.

دويم مثال: د رياضي د استقرآ په مرسته ثبوت کړئ چې لاندې رابطه د هرطبيعي عدد n لپاره سمه ده:

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

حل: په پورتنی رابطه کې د $n = 1$ لپاره لرو چې:

$$n = 1 \quad , \quad P(1) = 1 \times 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} = \frac{1 \times 2 \times 3}{3} = 2$$

$$\Rightarrow 2 = 2$$

نود $n = 1$ لپاره پورتنی رابطه سمه ده، که د $n = k$ لپاره يې سمه قبوله کړو، نو د $n = k + 1$ لپاره يې داسې ثبوتوو، لروچې:

$$n=k\ ,\ P(k)=1\times2+2\times3+3\times4+...+k\times(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

داستقرا فرضيه:

د $P(k)$ په فرضولو سره $P(n)$ رابطه د $n=k+1$ په نظر کې نيولو سره د رابطې سموالی ښکاره کړو، نو لروچې:

$$n=k+1,\quad P(k+1)=1\times2+2\times3+3\times4+...+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

د استقرا حکم:

د استقرا د فرضيې په نظر کې نيولو سره لروچې:

$$P(k+1)=[1\times2+2\times3+3\times4+...+k(k+1)]+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$
$$\Rightarrow 1\times2+2\times3+...+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

دا رابطه د $n=k+1$ لپاره سمه ده، نو په دې ډول د $P(n)$ رابطه د هر طبيعي عدد (n) لپاره سمه ده.

پوښتنې

1 – د رياضي د استقرا په مرسته وښياست چې د هر طبيعي عدد n لپاره لروچې:

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2 – د رياضي د استقرا په مرسته وښياست چې :

(i) $2+6+10+...+(4n-2)=2n^2$

(ii) $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

استنتاجي(نتيجوي) استدلال:



آیا کولای شو د شپې په تیاره کې له رڼا څخه پرته شیان ووینو؟

فعالیت

درې مختلف داسې ستونه ولیکئ چې د هر ستېن عناصر درې اختیاري مسلسل طبیعي عددونه وي.

- د هرستېن د عناصرو د ضرب حاصل جلا، جلا په لاس راوړئ.

- آیا ویلای شو چې دا د ضرب حاصلونه:

(I): پر 2 د وېش وړ دي؟ ولې؟

(II): پر 3 د وېش وړ دي؟ ولې؟

- آیا ویلای شو چې د دریو مسلسلو طبیعي عددونو د ضرب حاصل هروخت پر 6 د وېش وړ دي؟ ولې؟

- د دریو مسلسلو طبیعي عددونو د ضرب حاصل مووِلی پر 6 د وېش وړ قبول کړو، د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې نتیجه لاس ته راځي.

نتیجه: داسې طریقې ته چې د حقایقو سموالی یې په لومړي پړاو کې ومنو او عمومي نتیجه ترې لاس ته راوړو، استنتاجي استدلال یا د نتیجې اخیستنې طریقه ورته وایي یا په بل عبارت استنتاجي استدلال هغه طریقه ده چې سموالی مو ثبوت کړی یا منلی وي.

څه وخت چې له استنتاجي استدلال څخه استفاده کوو، ډاډمن یو چې نتیجه یې هر وخت سمه ده.

لومړی مثال: د لاندې جدول پړاونو ته په دقت سره وګورئ موږ څرنګه له عددونو سره چې د هر پړاوحقیقت او سموالی منو، بل پړاوته ځو او نتیجه په لاس راوړو.

د یادونې وړ ده چې په جدول کې په اختیاري ډول عدد ټاکل شوی دی، تاسوکولای شئ چې ددې عدد پرځای بل هر عدد چې موغوښتې وي، وټاکئ، وګورئ چې د هر عدد لپاره نتیجه یوشان ده.

یو عدد په خپله خوښه وټاکئ.	4	7	12
له لومړي عدد سره 5 جمع کړئ.	9	12	17
اوس یې دوه برابره کړئ.	18	24	34
له حاصل څخه د 4 عدد کم کړئ.	14	20	30
پر 2 یې وویشئ.	7	10	15
هغه عدد چې لومړی موټاکلی و، له عدد څخه کم کړئ.	3	3	3

اساسي خبره داده چې موږ په حقیقت کې د هغه عبارت پر بنسټ چې سموالی یې موږ قبول کړی دی، بله نتیجه لاس ته راوړو، دا مسله موږ ډاډ من کوي چې دهر اختیاري عدد په ټاکلو سره نتیجه هر وخت یوشان له 3 سره مساوي ده.

پوښتنې

1 – ښکاره کړئ چې د دوو طاقو عددونو د جمعې حاصل هر وخت یو جفت عدد دی.

2 – ثبوت کړئ چې هر صحیح طاق عدد د $2k+1$ په شکل دی.

3 – د سرو زرو په 9 سکوکې یوه تقلبي ده چې له نورو سکو څخه یې وزن کم دی.

څرنګه کولای شو چې د نورو وزنونو څخه د استفادې کولو پرته د پله یي ترازو په واسطه له دوه واره تللو سره تقلبي سکه پلاس راوړو؟

د مثال د نفي کولو استدلال:



يوموټی د خروار نمونه ده.
که د يوجنس يوه کوچنۍ نمونه بې کيفيته وي.
آيا کولای شو ادعا وکړو چې ددې جنس لويه
کتله ښه کيفيت لري؟

فعاليت

کولای شو، ډېر طبيعي عددونه د مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل په ډول وليکو، لکه:

$9 = 2 + 3 + 4$

- پورتني مثال ته په پاملرنې سره لاندې تش ځايو نه ډک کړئ؟

$$15 = \square + 2\ \square + 4 + 5$$

$$\square = \square + 5 + \square + 7$$

$$\square = 12 + \square + \square + 14$$

$$74 = 17 + \square + 19 + \square$$

- آيا کولای شو چې هر طبيعي عدد د مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل په شکل وليکو؟
- که چېرې ځواب مو (نه) وي، نومثال يې ووياست.

د پورتني فعاليت له سرته رسولوڅخه لاندې نتيجه لاس ته راځي.

نتيجه: کله چې له مثال سره وښايو چې عمومي نتيجه سمه نه ده او د ادعا ناسموالی ښکاره کړو دې ته د مثال د نفي کولو استدلال وايي.

مثال: د مسلئې د ثبوت لپاره همدو مره کافي ده چې وښايو چې د x او y دوه غير ناطق عددونه

لیکن ددوی د جمعې حاصل x+y یو ناطق عدد دی.

ددې لپاره که د $x = 1+\sqrt{2}$ او $y = 1-\sqrt{2}$ وټاکو، لروچې:

$$x + y = (1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = 1+1 = 2$$

لیدل کېږي چې ددې دواړو عددونو د جمعې حاصل د 2 عدد دی چې یوناطق عدد دی، په داسې حال کې چې x او y غیر ناطق (ګنګ) عددونه دي، نو دا ادعا نه شو کولای چې د دووغیر ناطقو عددونو د جمعې حاصل هر وخت یو غیر ناطق عدد دی.

پوښتنې

1- د مثال د نفې کولو په استدلال سره وښیاست چې(د هر مثبت حقیقي عدد مربع دعدد له مکعب څخه کوچنی ده)

2- دلاندې کوم یو بیان لپاره د نفې مثال و جود نه لري؟

a) د دوو ناطقو عددونو مجموعه یو ناطق عدد دی.

b) د هر مثبت عدد مربع له عدد څخه لویه ده.

c) دوې زاویې چې متناظرې ضلعې یې سره موازې وي، دا دوې زاویې سره مساوي هم دي.

d) د دوو طاقو عددونو مجموعه یو جفت عدد دی.

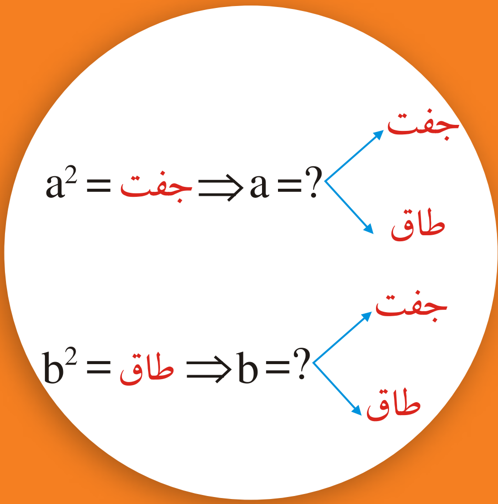
e) د دوو غیر ناطقو عددونو د ضرب حاصل، غیر ناطق عدد نه دی.

د خلف برهان یا غیر مستقیم ثبوت:

که د یوه عدد مربع جفت وي آیا خپله عدد جفت دی که طاق؟

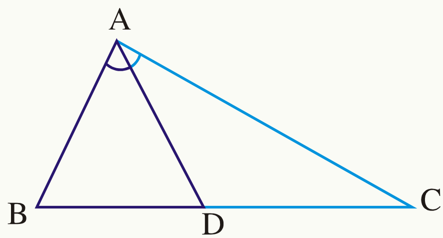
آیا کولای شو چي دا ادعا وکړو، که د هر عدد مربع جفته وي، خپله عدد جفت دی؟

که وښایو چي خپله عدد طاق نه دی، څه نتیجه اخلئ؟



فعالیت

د ABC مثلث د لاندي شکل په شان په پام کي ونیسئ:



- د $\hat{A}$ د زاویې ناصف رسم کړئ.
- که $\overline{BD} \neq \overline{CD}$ وي، نو د $\overline{AB}$ او $\overline{AC}$ ضلعې سره څه اړیکه لري؟
- که فرض کړو چي که $\overline{BD} \neq \overline{CD}$ وي، خو $\overline{AC} \neq \overline{AB}$ دی، دا مسئله موږ کومي نتیجې ته رسوي؟

نتیجه: که د خپلي ادعا د عکس په فرضولو او یاد قبلولو په نتیجه کي د فرض شوي ادعا خلاف ته ورسیږو، نو په دي حالت کي زموږ فرض شوی ادعا سمه ده، دا ډول استدلال د غیر مستقیم ثبوت (برهان خلف) په نامه یادیږي.

یادونه: په یاد ولرئ څه وخت چې له غیر مستقیم ثبوت څخه ګټه اخلو، لاندې پړاوونه په پام کې نیسو:

لومړی پړاو: فرضوو چې مطلوبه ادعا سمه نه ده.

دویم پړاو: ښکاره کوو چې دا فرض د اسې نتیجه په لاس راکوي چې پېژندل شوي حقیقتونه نفي کوي.

دریم پړاو: اوس چې نتیجه نفي شوې ده، نومعلومه خبره ده چې د لومړي پړاو فرض سم نه دی، نو مطلوب سم دی.

مثال: وښیاست که n^2 یو جفت طبعي عدد وي، نو n هم جفت دی؟

ددې مسلئې د ثبوت لپاره فرضوو، سره ددې چې n^2 جفت دی، خو n یو طاق عدد دی، نو کولای شو چې n د $n = 2k+1$ په شکل ولیکو، په داسې حال کې چې k یو تام عدد دی، نو ددې عدد مربع مساوي ده په:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2+k)+1$$

$$\Rightarrow n^2 = 4(k^2+k)+1$$

پورتنۍ مساوات ښکاره کوي چې n^2 یو طاق عدد دی چې دا د فرض خلاف ده، نو په نتیجه کې دا فرض چې n یو طاق عدد دی، ناسمه ده او دې نتیجې ته رسیږو چې n هم یو جفت عدد دی، ځکه دا فرض چې n طاق عدد دی، مونږ دې نتیجې ته ورسولو چې n^2 هم طاق عدد دی

پوښتنه

وښیاست چې $\sqrt{3}$ یو غیر ناطق عدد دی.

د رياضی منطق او دبیان استنتاج



له خنگ ملگری څخه د يو خبر اوريدل به څه نتيجه ولري؟
آيا خبر سم دی که ناسم؟

تعريف

يوې خبري جملې ته بيان وايي چې نتيجه يې په سموالي يا ناسم والي پاى ته ورسيږي.

فعاليت

لاندې جملې په پام کې ونيسئ او وښياست چې له هغو څخه کومه يوه يې بيان او کومه يوه يې بيان نه دی او منطقي نتيجه يې څه ده؟

i) نن ورځ باران نه اوري.
ii) آيا نن ورځ باران نه اوري؟
iii) بارانه اووره..
iv) څه زيات باران اوري!

له پورتني فعاليت څخه لاندې نتيجه لاس ته راځي.

نتيجه:

1 - هره جمله نه شی کېدای چې بيان وي. يوه جمله کيدای شي يوه حکمي، تعجبي پوښتنه او يا يو خبر وي.

2 - هره خبري جمله سمه يا ناسمه ده.

يادونه: که يو بيان ته P ووايو، د سم بيان د ليکلو طريقه $P \equiv T$ او د ناسم بيان د ليکلو طريقه

$P \equiv F$ دی، سر بیره پر دې $\sim P$ د P د بیان نفي ښيي.
هغه جدول ته چې د یو بیان ارزیابي په کې صورت نیسي، د صحت د جدول په نامه یادېږي، نو د P د هربیان لپاره لروچې:

P	~ P
T	F
F	T

مثال: د (مسکا د لسم ټولگي زده کوونکې ده =P) بیان لپاره د صحت جدول ترتیب کړئ.
حل: د پورتني بیان د ارزیابۍ لپاره پوهېږو چې نو موړی بیان سم او یا ناسم دی.
که بیان سم وي، نو کولای شو چې ولیکو $P \equiv T$ او $\sim P \equiv F$ دی.
نو د P د بیان د نفي حالت عبارت دی له « P سم نه دی» یعنې : $\sim P \equiv F$ دی. دا بیان د دې په معنا دی چې مسکا د لسم ټولگي زده کوونکي نه ده، یعنې P ناسم دی.
که $P \equiv F$ وي، نو په دې حالت کې $\sim P = T$ دی. د پورتني ځواب صحت په لاندې جدول کې گورو:

P	~ P
T	F
F	T

د بیانونو ترکیب

که د p او q دوه بیانونه راکړشوي وي، په دې حالت کې:
1 - د $p \wedge q$ ترکیب د p او q د بیانونو د عطفي ترکیب یا (منطقي " او") په نامه یادېږي، د "$\wedge$" علامه د (او) په معنا په کار وړل شوي ده.
2 - د $p \vee q$ ترکیب د p او q د بیانونو د فصلي ترکیب (منطقي " یا ") په نامه یادېږي، د "$\vee$" علامه د (یا) په معنا په کار وړل شوي ده.
3 - د $p \Rightarrow q$ د مشروط ترکیب او یا د (که p نو q ویل کېږي) په نامه یادېږي، د $\Rightarrow$ علامه ښکاره کوي چې p د شرطي ترکیب اساس چې q ترې نتیجه کېږي.
4 - د $p \Leftrightarrow q$ د دوو خواوو د شرطي ترکیب په نامه او یا د (که او یوازې که) په نامه یادېږي.
د ($\Leftrightarrow$) علامه ښکاره کوي چې که p د شرطي ترکیب اساس وي q ترې نتیجه کېږي او که q دشرطي ترکیب اساس وي، p ترې نتیجه کېږي. په دې ډول د p د بیانونو او (که اویوازې که) ترکیب لاندې د صحت په جدول کې گورو:

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\Rightarrow q$	$p\Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

لومړی مثال: که چیرې $P\equiv(2+4=6)$ او (دمنفي عدد مربع) $q\equiv$ بیانونه راکړل شوي وي د q، p، $\sim P$، $\sim q$، $p\vee q$، $p\wedge q$، $\sim(p\wedge q)$ او $\sim(p\vee q)$ د بیانونو نتیجې پلاس راوړې.

حل: پورتنیو بیانونو ته په توجه سره ددې بیانونو ارزښت عبارت دی له:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim(p\vee q)$
T	F	F	T	F	T	T	F

دویم مثال: د سموالي (صحت) دجدول په تر تیبولو سره ښکاره کړئ چې د $P\vee(p\Rightarrow q)$ بیان هر وخت سم دی.

حل:

p	q	$p\Rightarrow q$	$p\vee(p\Rightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

د سموالي دجدول په اخیرني ستون کې وینو چې د $p\vee(p\Rightarrow q)$ بیان هر وخت سم دی.

پوښتني

1 – د صحت د جدول په تر تیبولو سره وښیاست چې د $(p \Rightarrow q) \vee \sim (\sim p \vee q)$ بیان هر وخت سم دی- متوجه اوسئ چې p او p ~ یوله بله مستقل نه دی.
2 – د صحت د جدول په جوړولو سره وښیاست چې د $(p \Rightarrow q)$ او د $\sim (p \vee q)$ د بیانونو ارزښت سره مساوي دی یعني:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim (p \vee q)$$

د فصل لنډیز

د ریاضي استدلال:
هغه طریقه چې د هغې په واسطه د ریاضي د یوبیان سموالی په لاس راځي، د ریاضي د استدلال په نامه یادېږي.
شهودي درک:
هغه طبیعي یا حسي پوهه چې د هغې په مرسته دیوې موضوع سموالی یا حقیقت او یا یو مفهوم پرته له استدلاله قبلوو، له شهودي درک څخه عبارت ده چې د وخت په مختلفو مرحلوکې یوله بله سره توپیر لري.
تمثیلي یا قیاسي استدلال:
د دوو پیښو تر منځ د ورته والی پیداکول او د هغوی په باره کې یوشان نتیجې اخیستلو ته تمثیلي یا قیاسي استدلال وایي.
استقرایی استدلال:
هغه طریقه چې د یو شمېر مشاهد و پر اساس ور څخه عمومي نتیجه اخیستل کېږي یعني د جز نه کل په لاس راځي د استقرایي استدلال په نامه یادېږي.
د ریاضي د استقرا استدلال:
که چېرې $P(n)$ د n د طبیعي عددونو په برخه کې یو حکم راکړل شوی وي، که د n=1 لپاره $P(1)$ سم وي او په دویم پړاوکې د $p(k)$ له سموالي څخه د $p(k+1)$ سموالی په لاس راشي، نو د $p(n)$ بیان د هر طبیعي عدد (n) لپاره سم دی او دریاضي د استقرا د استدلال په نامه یادېږي.

نتيجوي استدلال:
له هغه حقيقتونو څخه په ګټه اخيستنه چې صحيح والی يې په پيل کې منل شوی وي، عمومي نتيجه لاس ته راوړل شي، د استنتاجي استدلال يا د نتيجې اخيستنې د طريقې په نامه يادېږي.
يا په بل عبارت هغه طريقه ده چې سم والی مو ثبوت يا قبول کړی وي.

د نفي مثال استدلال:
کله چې له مثال سره وښايو چې عمومي نتيجه سمه نه ده او د ادعا ناسموالی په عمومي ډول ښکاره کړو، دې ته د مثال د نفي کولو استدلال وايي.
غير مسقيم ثبوت:
که د خپلې ادعا يا قضيې د عکس په فرضولو يا قبلولو د فرض شوي ادعا خلاف ته ورسېږو، نو په دې حالت کې فرضيه ناسمه او خلاف يې سم دی. دې ډول استدلال ته غيرمستقيم ثبوت (برهان خلف) وايي.

بيان :
يوې خبرې جملې ته چې نتيجه يې سمه يا ناسمه وي، د بيان په نامه يادېږي، يوه جمله چې نتيجه يې سمه اويا ناسمه نه وي، بيان نه دی.

د بيانونو ترکيب:
که د p او q دوه بيانونه راکړل شوي وي، په دې حالت کې:
1- د $p \wedge q$ ترکيب د p او q دوه بيانونه د عطفي ترکيب يا (منطقي "او") په نامه يادېږي.
چې د p او q د بيان په شکل ويل کېږي.

2- د $p \vee q$ ترکيب د p او q د بيانونو د فصلي ترکيب (منطقی " يا ") په نامه يادېږي، د $(\vee)$ علامه د (يا) په معنا په کار وړل شوي ده.

3- (که چېرې نو) او يا د "$\Rightarrow$" منطقي علامه د $p \Rightarrow q$ د p او q مشروط بيان دی، که p نو q ويل کېږي، د $\Rightarrow$ علامه ښکاره کوی چې p د شرطي ترکيب اساس دی، ددې لپاره چې q له هغې نتيجه شي.
4- که يوازې که يا دا "$\Leftrightarrow$" منطقي علامه د p او q د بيانونو دوو خواوو شرطي ترکيب دی چې د (p که اويوازې که q) دی.

د فصل پوښتنې

1 – له لاندې ځوابونو څخه ستاسو په نظر کوم یو سم دی؟

الف- په مشاهداتو کې خطا د استقرایي طریقې له ستونزو څخه یوه ستونزه ده.

ب- د ریاضي د استدلال له قوي طریقو څخه یوه هم استقرایي طریقه ده.

ج- د ریاضي په استقرایي طریقې کې یوه ستونزه د مشاهداتو کموالی دی.

د- د الف او ج ځوابونه سم دي.

2 – له لاندې ځوابونو څخه کوم یو یې سم نه دی؟

استقرایي استدلال

الف- د ریاضي له مسألو څخه یوه قوي طریقه ده.

ب- د مسألو په برخه کې موږ ته د عمومي قوانینو لارښوونه کوي.

ج- دمسألو دحل لپاره له ریاضي پرته یوه طریقه ده.

د – دمسألو د حلولو لپاره د ریاضي طریقه نه ده.

3 – د شهود په برخه کې له لاندې ځوابونو څخه کوم یو یې سم (صحیح) دی؟

الف- دداسې نتیجې د اخیستنې لپاره چې سل په سلو کې سمه ده.

ب- له شهود څخه په ګټه اخیستنه پر ډاډ سره نه شوو ویلای چې نتیجه سل په سلو کې سمه ده.

ج شهود د ریاضي د ښه درک کولو لپاره دی.

د: له شهود څخه په ګټه اخیستنه، کولای شو د ثبوت لپاره قطعي ګمان له حتمي استدلال سره وکړو.

4 – له لاندې ځوابونو څخه کوم یو یې سم نه دی؟

الف: استقرایي استدلال له جز څخه کل ته رسیدل دي.

ب: استقرایي استدلال له کل څخه جز ته رسیدل دي.

ج: له استقرایي استدلال څخه نه شو کولای چې د ریاضي د دقیق ثبوت لپاره ګټه واخلو.

د: استقرایي استدلال دیو شمېر مشاهد و پر اساس یوه کلي نتیجه ده.

5 – د استنتاجي استدلال پر اساس له لاندې ځوابونو څخه کوم یو یې سم نه دی؟

الف: که واوره اوري ځمکه نمجنه کېږي، ځمکه نمجنه ده، نو واوره وریدلې ده.

ب: د یوه ښوونځي ټول فارغان له کمپیوټر سره بلد او په ریاضي ښه پوهېږي، ضمیر چې له همدې ښوونځي څخه فارغ شوی دی. نو له کمپیوټر سره ښه بلد او په ریاضي ښه پوهېږي.

ج: که یوه څلور ضلعي مربع وي، نو قطرونه یې یو پربل عمود دي، که د څلور ضلعي قطرونه یو پر بل عمود وي، نو دا څلور ضلعي مربع ده.

د: که د یوه مثلث دوې ضلعې سره مساوي وي، متساوي الساقین مثلث دی او که د مثلث درې ضلعې سره مساوي وي، متساوي الاضلاع مثلث دی، نو هر متساوي الاضلاع مثلث، متساوي الساقین مثلث دي.

6 – د قیاسي استدلال په واسطه وښیاست د هرې زاویې لپاره $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ده.

7 – د استقرایي استدلال په واسطه وښیاست چې د n مسلسلو تاقو طبیعي عددونو مجموعه له n^2 سره مساوي ده.

8 – له استقرایي استدلال سره وښیاست چې د هر طبیعي عدد n لپاره لاندې مساوات سم دی.

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

9 – د استنتاجي استدلال په اساس ثبوت کړئ چې د دوو جفتو عددونو د جمعې حاصل هر وخت جفت عدد دی؟

10 – له یوه مثال سره وښیاست چې د $2^n + 3$ افاده د هر طبیعي عدد لپاره هر وخت لومړنی عدد نه دی.

11 – د غیر مستقیم ثبوت د استدلال په واسطه وښیاست که n یو طبیعي اختیاری عدد وی او هم n^2 طاق وي، نو n هم طاق دی.

12 – د (باران اوري او وریځ نشته دی، نو باران نه اوري) د ترکیبي بیانونو لپاره د صحت جدول جوړ کړئ، په داسې حال کې که

(α = باران اوري)) او ((وریځ ده $=\beta$)) سره وښایو. (1) عدد د سم اود (0) عدد د ناسم لپاره په کار یوسي.

$\propto$	β	$-\propto$	$-\beta$	$\propto \wedge -\beta$	$\propto \wedge -\beta \Rightarrow -\propto$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				